

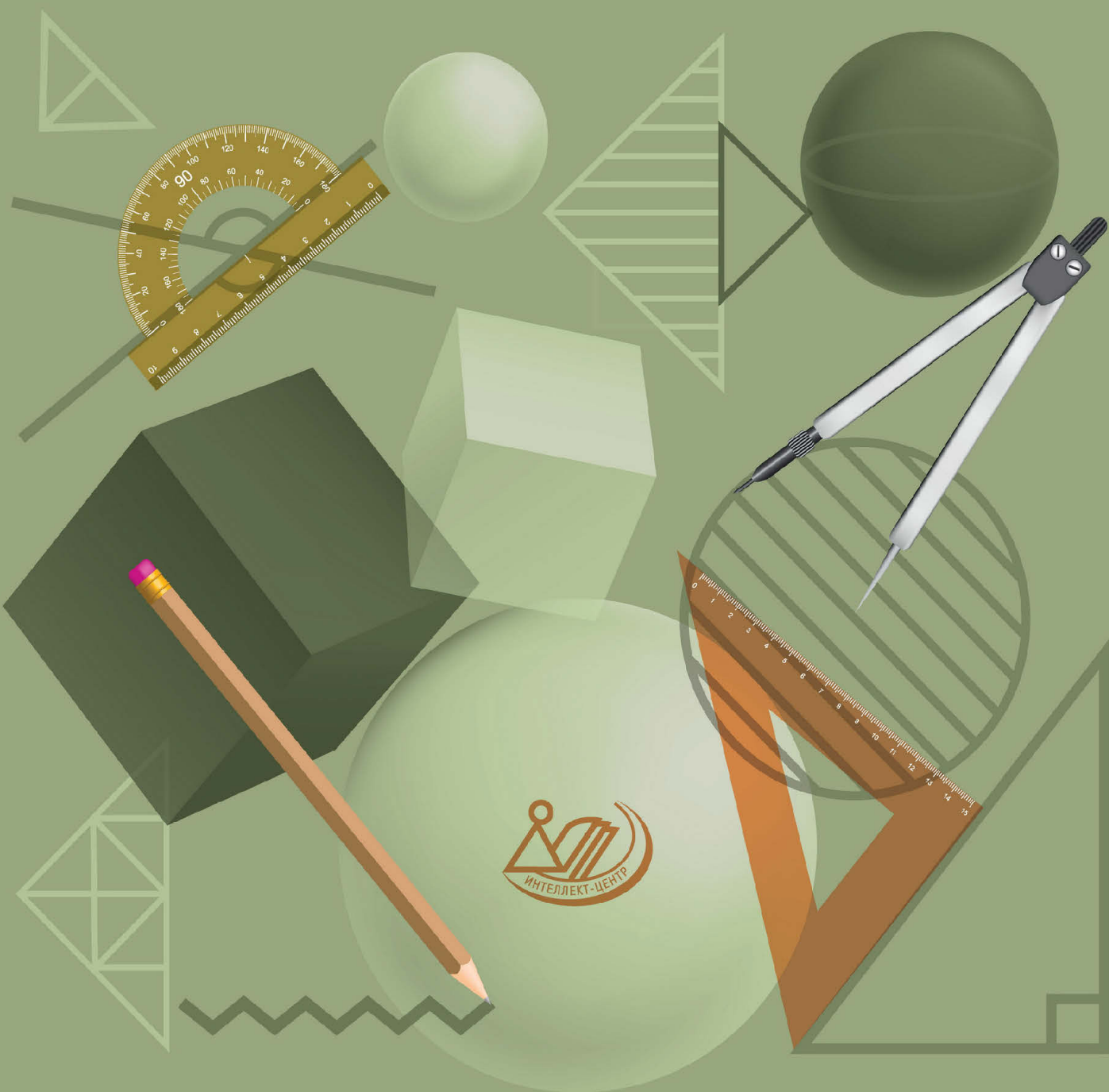
ГЕОМЕТРИЯ

8

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

КЛАСС

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ



Т.Л. Ниренбург

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Электронное издание



Москва
Издательство «Интеллект-Центр»
2025

УДК 514(075.3)

ББК 22.12я721

Н68

Рецензенты:

Е. В. Лукьянова – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа им. П.С. Новикова ИМИИ МПГУ, учитель высшей категории;

Т. Н. Казарихина – кандидат педагогических наук, учитель математики и информатики высшей квалификационной категории, заместитель директора АНО СОШ «Димитриевская», доцент МПГУ

Ниренбург, Т. Л.

Н68 Геометрия. 8 класс. Тетрадь-тренажёр. Углублённый уровень / Т. Л. Ниренбург. — Эл. изд. — 1 файл pdf : 99 с. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2025. — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-907985-74-2

Тетрадь-тренажёр — это пособие для изучения геометрии в 8 классе по углублённой программе. Задания охватывают все основные темы углублённого курса, для удобства использования все задания представлены в виде таблиц. Выполнять решения можно непосредственно в тетради-тренажёре. Пособие ориентировано на последний ФГОС для углублённой программы с опорой на учебник «Геометрия: 7–9 классы» (Атанасян Л. С. и др.), включённый в Федеральный перечень учебников. Также возможно использование этих материалов с другими учебниками и учебными пособиями по геометрии 8 класса.

Пособие адресовано в первую учителям, работающим по углублённой программе, но будет также полезно репетиторам, учащимся и их родителям.

УДК 514(075.3)

ББК 22.12я721

Электронное издание на основе печатного издания: Геометрия. 8 класс. Тетрадь-тренажёр. Углублённый уровень / Т. Л. Ниренбург. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2025. — 96 с. — ISBN 978-5-907985-25-4. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-907985-74-2

© ООО «Издательство «Интеллект-Центр», 2025

© Ниренбург Т. Л., 2025

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тетрадь-тренажёр представляет собой пособие по решению задач, предназначенное помочь учащимся освоить углублённую школьную программу по геометрии. Задачи разбиты на шесть разделов в соответствии с программой: повторение и углубление темы «Окружности»; «Многоугольники»; «Средние линии и теорема Фалеса»; «Площади и теорема Пифагора»; «Подобие и пропорциональные отрезки»; «Задачи на построение». Изучение темы «Окружности» в настоящее время начинается в 7 классе. В 8 классе продолжается изучение этой темы. Учителя по-разному видят её место в курсе 8 класса: некоторые изучают эту тему последней, некоторые предпочитают начинать с неё, а затем продолжать в течение всего года. Поэтому задачи по этой теме сгруппированы в блоки, которые идут в конце изучения каждого раздела и не используются при прохождении остальных блоков. Таким образом, можно изучать тему «Окружности» в течение всего учебного года, а можно изучить в конце года, взяв последний блок задач из каждого раздела.

В каждом разделе предложены задачи для отработки навыков решения основных типов задач. Для достижения устойчивого результата почти в каждом задании предлагается несколько однотипных задач или несколько разных задач, обыгрывающих один и тот же вопрос.

Данная тетрадь-тренажёр является продолжением аналогичного пособия для 7 класса, а также серии тетрадей-тренажёров для базовой программы по геометрии. Это пособие не заменяет учебник (с большим количеством объяснений теоретических аспектов) и сборники задач, ориентированных на учебники, но гармонично дополняет их. Некоторые задания обучающимся по углублённой программе могут показаться простыми. Но для успешного решения более сложных задач навык решения основных типов «простых» задач должен быть доведён почти до автоматизма.

Для удобства оформления решений задачи сгруппированы в таблицы. При этом предполагается, что решения будут выполняться непосредственно в этой тетради. Такое оформление упрощает проверку результатов учителем и обучающимся. Все разделы (кроме последнего) содержат теоретические сведения, которые отмечены знаком .

Задания для отработки навыков и задания «Проверьте себя» для проверки степени усвоения материала. В некоторых заданиях приведены образцы решения задач (такие задачи выделены серым цветом). К большинству заданий в конце пособия приведены ответы и/или указания к решению. Задания предполагается выполнять последовательно, что способствует достижению лучшего результата.

При выполнении заданий обучающиеся выполняют большую работу, но при этом предложенный способ оформления решений упрощает учителю проверку результатов. Легко организовывать перекрёстную проверку учениками.

Тетрадь-тренажёр удобна в использовании на уроках, для выполнения домашних заданий, для отработки материала учащимися, вынужденно пропустившими занятия. Она поможет также повторить материал 8-го класса при подготовке к экзаменам не только в 9-м, но и в 11-м классе.

ОКРУЖНОСТИ

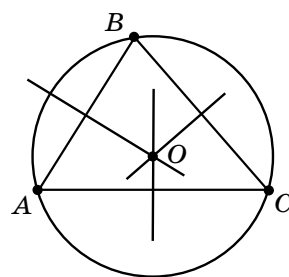
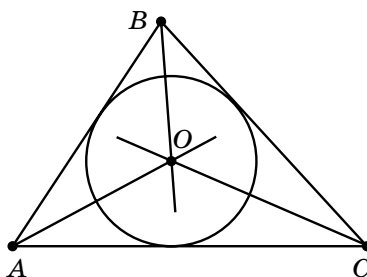
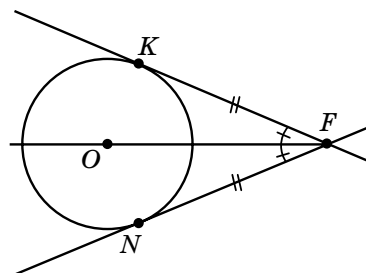
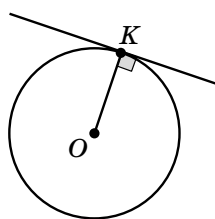
(ПОВТОРЕНИЕ И УГЛУБЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА 7 КЛАССА)

КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ



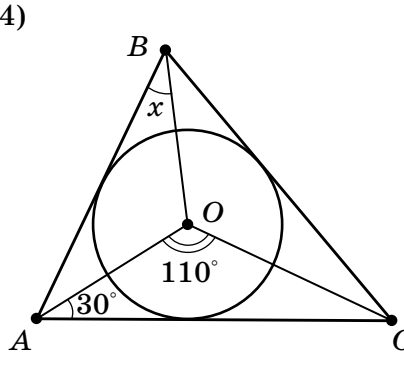
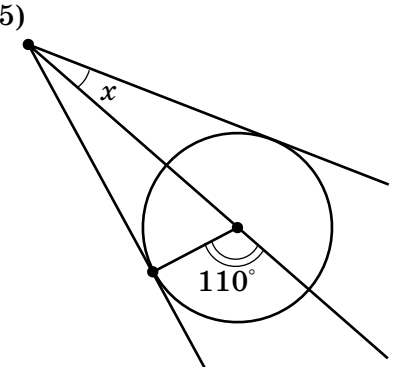
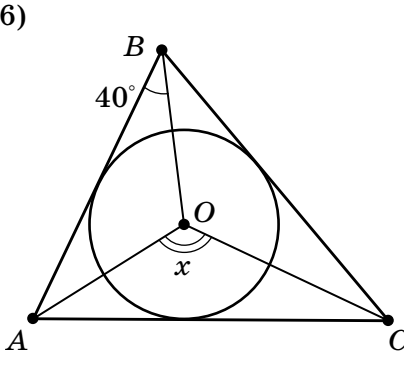
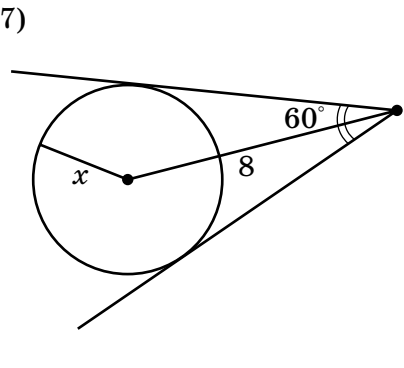
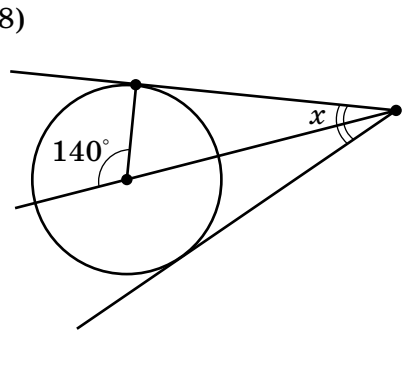
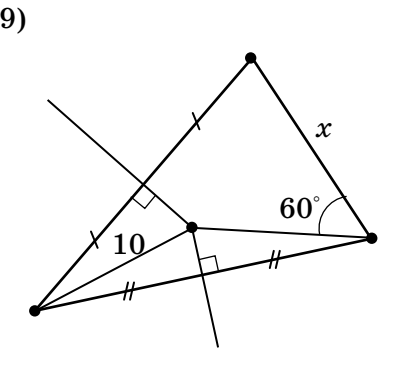
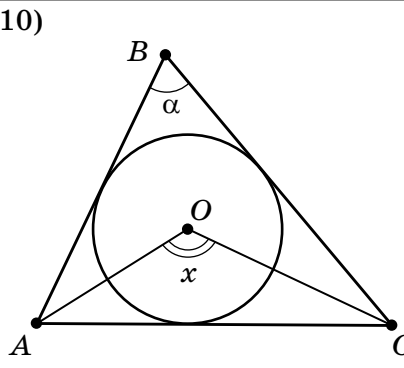
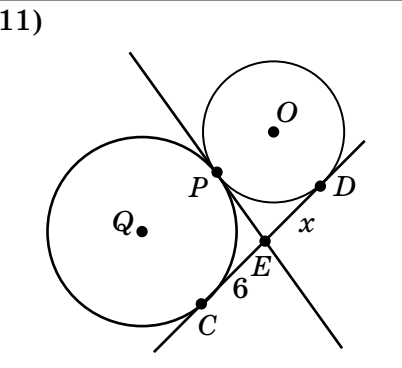
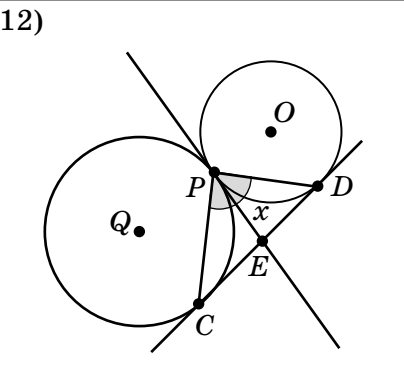
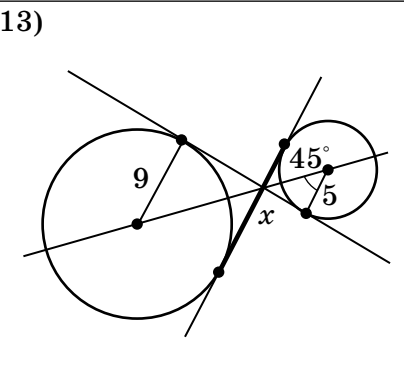
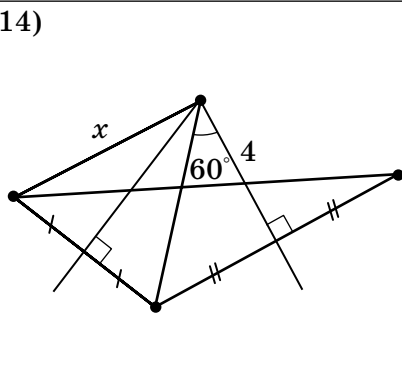
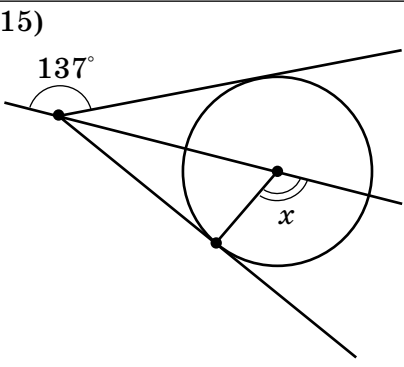
Важно знать:

- Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведённому в точку касания (свойство касательной).
- Прямая касается окружности, если она проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна этому радиусу (признак касательной).
- Отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны, и образуют равные углы с прямой, проходящей через данную точку и центр окружности.
- Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются окружности. Окружность при этом называется вписанной в многоугольник.
- В любой треугольник можно вписать окружность, её центр находится в точке пересечения биссектрис треугольника.
- Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на окружности. Окружность при этом называется описанной около многоугольника.
- Вокруг любого треугольника можно описать окружность, её центр находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
- Взаимное положение двух окружностей (r_1, r_2 – радиусы окружностей, $r_1 \geq r_2$, d – расстояние между их центрами): $d > r_1 + r_2$ – окружности не пересекаются; $d = r_1 + r_2$ – окружности касаются внешним образом; $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ – окружности пересекаются; $d = r_1 - r_2$ – окружности касаются внутренним образом или совпадают (при $r_1 = r_2$); $d < r_1 - r_2$ – окружности расположены одна внутри другой.



Задание 1. Даны касательные к окружности, отмечен центр окружности. Найдите x по данным чертежа.

1) Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) Ответ: _____
-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

4)  Ответ: _____	5)  Ответ: _____	6)  Ответ: _____
7)  Ответ: _____	8)  Ответ: _____	9)  Ответ: _____
10)  Ответ: _____	11)  Ответ: _____	12)  Ответ: _____
13)  Ответ: _____	14)  Ответ: _____	15)  Ответ: _____

16)

Ответ: _____

17)

Ответ: _____

18)

Ответ: _____

19)

Ответ: $P_{\Delta MKL} =$ _____

20)

Ответ: _____

21)

Ответ: _____

Задание 2. Определите взаимное расположение окружностей, если известны их радиусы r_1 и r_2 и расстояние между их центрами d .

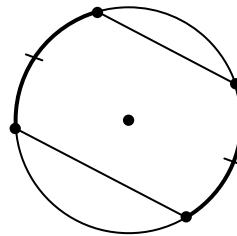
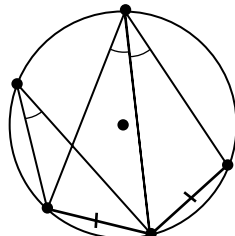
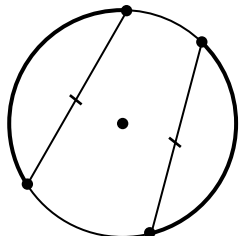
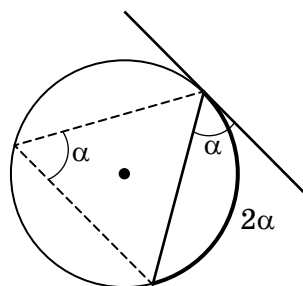
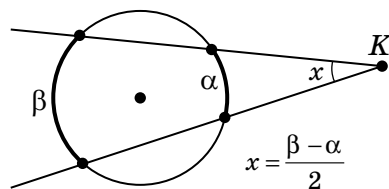
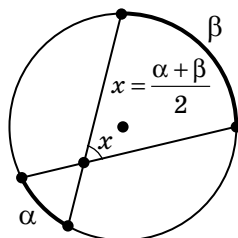
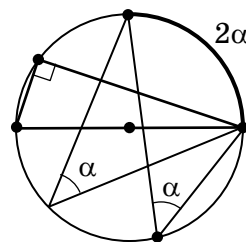
		$r_1 = 7$ $r_2 = 4$ $d = 8$	$r_1 = 5$ $r_2 = 3$ $d = 9$	$r_1 = 9$ $r_2 = 2$ $d = 5$	$r_1 = 6$ $r_2 = 4$ $d = 10$	$r_1 = 12$ $r_2 = 4$ $d = 8$
не пересекаются						
касаются внешним образом						
пересекаются						
касаются внутренним образом						
одна внутри другой						

УГЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ



Важно знать:

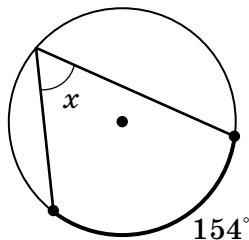
- Градусная мера дуги окружности равна градусной мере центрального угла, который на неё опирается.
- Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой.
- Угол между хордами окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опирается он и угол, ему вертикальный.
- Угол между секущими к окружности измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, которые он высекает на окружности.
- Угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания, измеряется половиной дуги, которая заключена внутри него. Этот угол равен вписанному углу, опирающемуся на ту же самую дугу. Верно и обратное: если прямая, проходящая через вершину треугольника, составляет с его стороной угол, равный противолежащему этой стороне углу треугольника, то эта прямая – касательная к описанной окружности этого треугольника.
- Равные хорды стягивают равные дуги (меньшие полуокружности), и наоборот – равные дуги опираются на равные хорды.



- Равные вписанные углы опираются на равные хорды.
- Параллельные хорды высекают на окружности равные дуги.

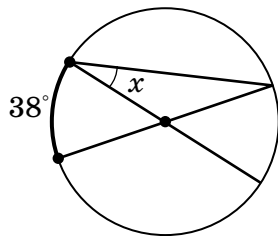
Задание 3. По данным чертежа найдите x .

1)



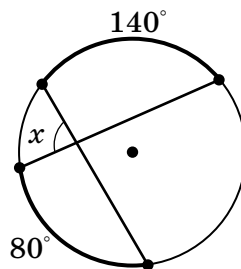
Ответ: _____

2)

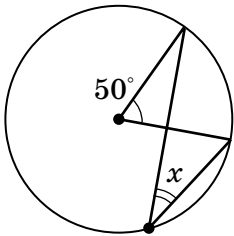
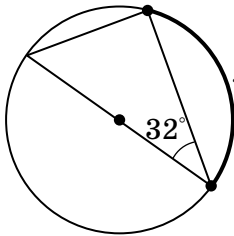
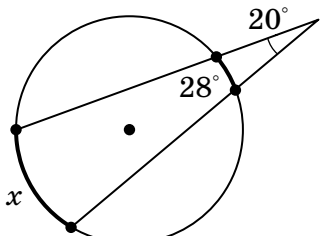
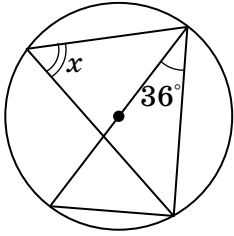
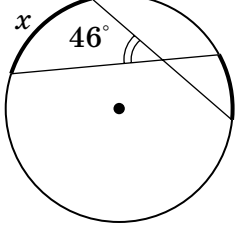
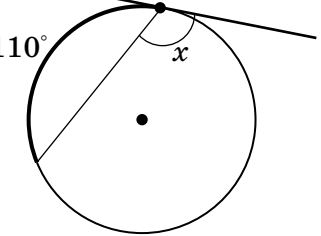
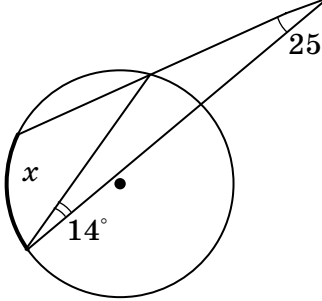
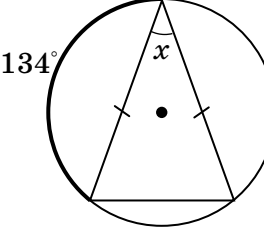
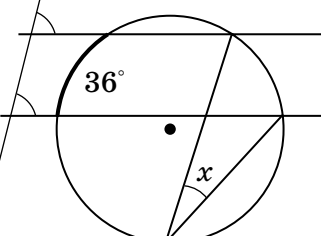
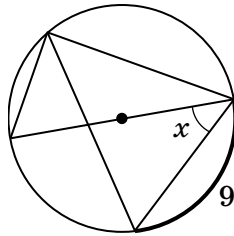
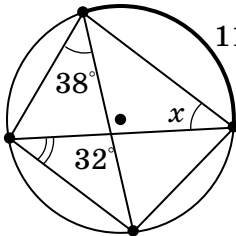
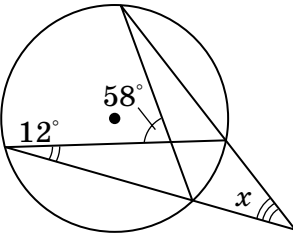


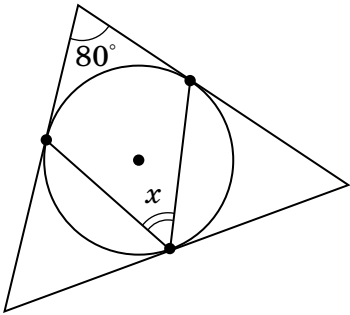
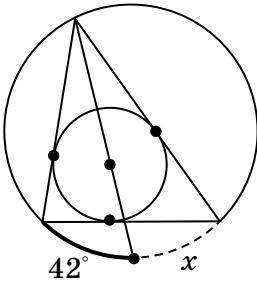
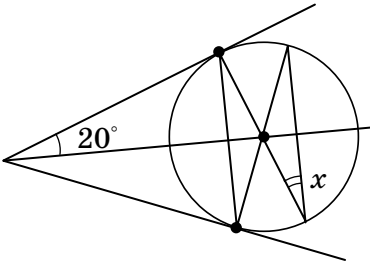
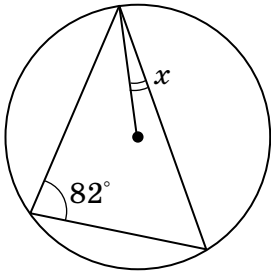
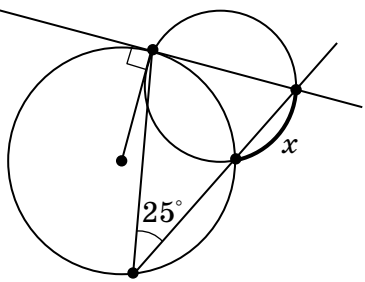
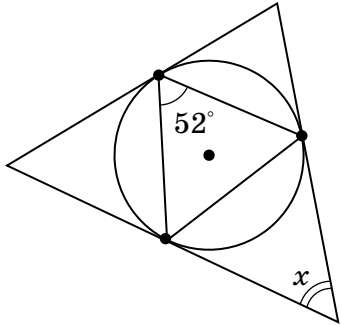
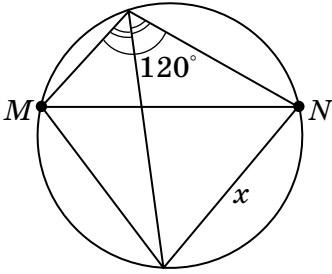
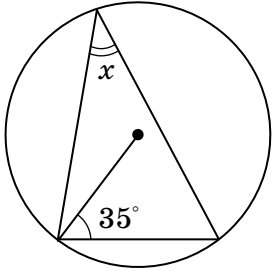
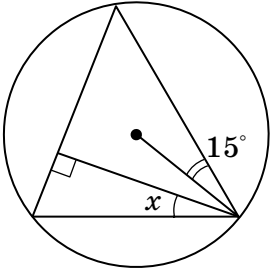
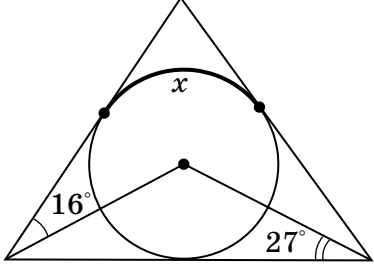
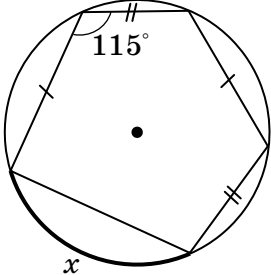
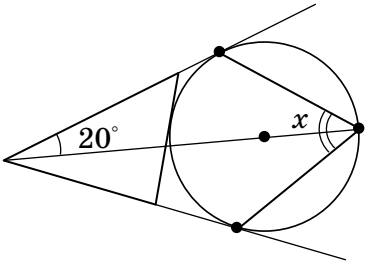
Ответ: _____

3)



Ответ: _____

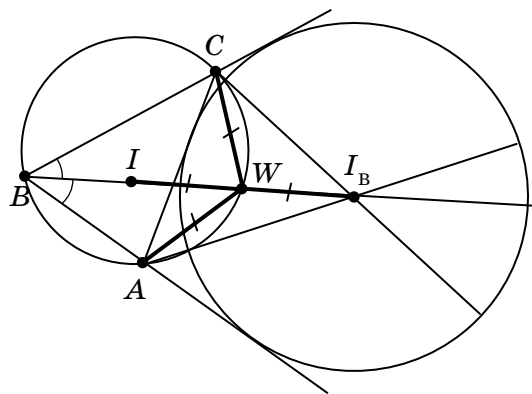
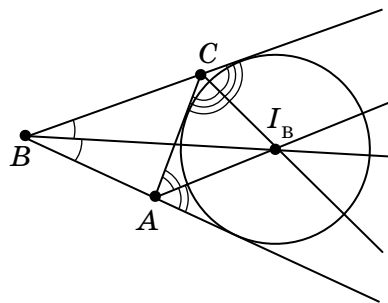
4)  Ответ: _____	5)  Ответ: _____	6)  Ответ: _____
7)  Ответ: _____	8)  Ответ: _____	9)  Ответ: _____
10)  Ответ: _____	11)  Ответ: _____	12)  Ответ: _____
13)  Ответ: _____	14)  Ответ: _____	15)  Ответ: _____

16)  Ответ: _____	17)  Ответ: _____	18)  Ответ: _____
19)  Ответ: _____	20)  Ответ: _____	21)  Ответ: _____
22) $MN = 12$  Ответ: _____	23)  Ответ: _____	24)  Ответ: _____
25)  Ответ: _____	26)  Ответ: _____	27)  Ответ: _____



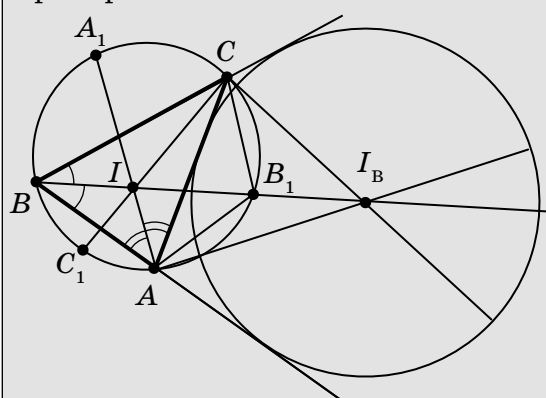
Важно знать:

- Окружность, которая касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон, называется *вневписанной окружностью* этого треугольника. Таких окружностей у каждого треугольника три – при каждой стороне. Центр такой окружности находится в точке пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника и биссектрис двух его внешних углов.
- Точка пересечения биссектрисы угла треугольника с описанной около него окружностью равноудалена от двух других вершин треугольника, центра вписанной и центра вневписанной окружности (лежащей напротив исходного угла).



Задание 4. Заполните таблицу, опираясь на чертёж.

Пример:



$\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 48^\circ$.

Найдите $\angle C_1IA$.

Решение: так как биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, CC_1 – биссектриса угла C . Тогда величины дуг C_1A и A_1C равны соответственно 24° и 20° .

Вычислим величину угла между хордами:

$$\angle C_1IA = \frac{1}{2}(24^\circ + 20^\circ) = 22^\circ.$$

Ответ: 22° .

	$\angle A$	$\angle B$	$\angle AIB_1$	$\angle ICB_1$	$\angle AI_BI$	$\angle I_BB_1C$	$\angle IAI_B$
1)	50°	60°					
2)	38°	52°					
3)	60°	60°					
4)		40°	72°				
5)		52°		78°			

	$\angle A$	$\angle B$	$\angle AIB_1$	$\angle ICB_1$	$\angle AI_B I$	$\angle I_B B_1 C$	$\angle IAI_B$
6)	54°		96°				
7)			52°			18°	
8)				50°	34°		
9)		62°		71°			
10)		50°				30°	
11)				72°	62°		
12)	2α	2β					

Задание 5. Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Угол, опирающийся на диаметр, равен 90° .	
2) Хорды окружности равны, когда они находятся на равном расстоянии от центра окружности.	
3) Равные центральные углы окружности опираются на дуги, имеющие равные градусные меры.	
4) Равные вписанные углы окружности опираются на дуги, имеющие равные градусные меры.	
5) Если вписанные углы опираются на одну и ту же дугу окружности, то они равны.	
6) Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности равен 180° .	
7) Если прямая перпендикулярна радиусу окружности, то она является касательной к этой окружности.	
8) Если вписанные углы окружности опираются на одну хорду, то они имеют равные градусные меры.	
9) Если острые вписанные углы опираются на равные хорды, то они имеют равные градусные меры.	
10) Угол с вершиной внутри окружности, опирающийся на некоторую дугу, больше вписанного угла этой окружности, опирающегося на ту же дугу.	
11) Угол между секущими к окружности, больше вписанного угла этой окружности, опирающегося на большую из высекаемых сторонами исходного угла дуг.	
12) Острый угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания, измеряется половиной центрального угла, опирающегося на дугу, заключённую внутри искомого угла.	

Б) По данным чертежа найдите x .

1) Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) Ответ: _____
4) Ответ: _____	5) Ответ: _____	6) Ответ: _____
7) Ответ: _____	8) $AB \parallel l$ Ответ: _____	9) Ответ: _____

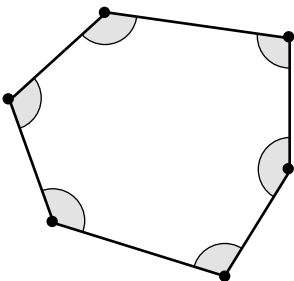
МНОГОУГОЛЬНИКИ

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МНОГОУГОЛЬНИКОВ

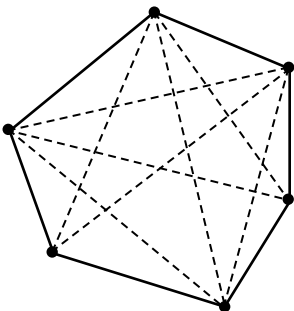


Важно знать:

- Сумма углов выпуклого n – угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$.
- Сумма внешних углов выпуклого n – угольника равна 360° (по одному при каждой вершине).



- В выпуклом n – угольнике $\frac{n(n - 3)}{2}$ диагоналей.



Задание 6. Заполните таблицу для многоугольника.

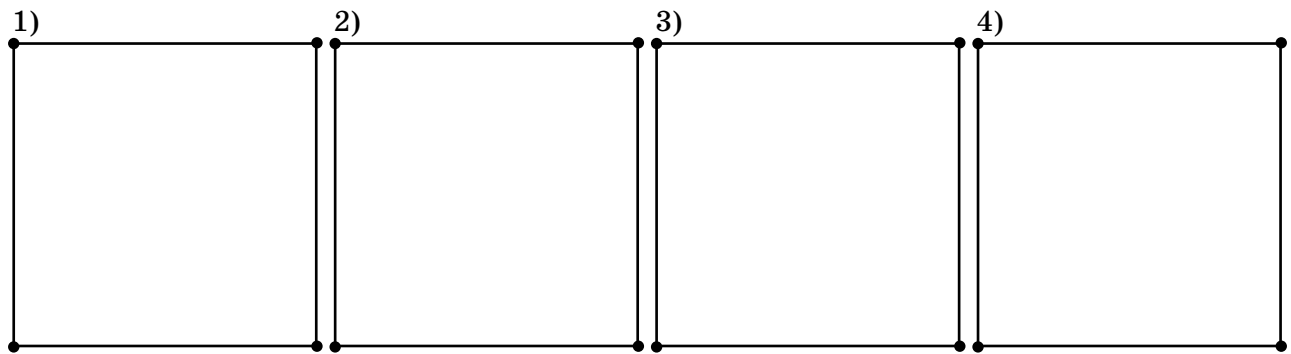
количество сторон	5	9				
сумма углов			1440°	1800°		
количество диагоналей					9	20

Задание 7. Ответьте на вопросы.

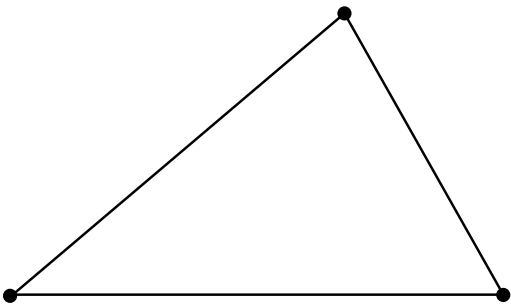
1) В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали из двух соседних вершин. Сколько треугольников при этом образовалось?	
Ответ: _____	
2) В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали. Сколько треугольников при этом образовалось?	
Ответ: _____	

3) В выпуклом шестиугольнике провели все диагонали, соединяющие вершины «через одну». Сколько треугольников при этом образовалось?	
Ответ: _____	
4) В выпуклом шестиугольнике провели все диагонали. Оказалось, что никакие три из них не проходят через одну точку. Сколько при этом образовалось треугольников, внутри которых нет отрезков диагоналей?	
Ответ: _____	

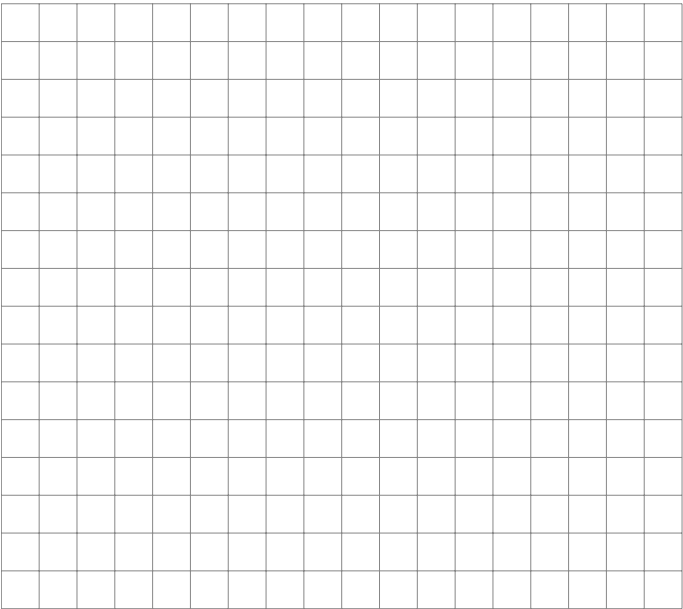
Задание 8. Разрежьте квадрат на два равных 1) треугольника; 2) четырёхугольника; 3) пятиугольника; 4) шестиугольника.



Задание 9. 1) Разрежьте треугольник на несколько треугольников так, чтобы никакие два из них не имели полной общей стороны.



2) Приведите пример четырёхугольника, который можно разрезать двумя разрезами на 6 частей.



ПАРАЛЛЕЛОГРАММ. РОМБ. ПРЯМОУГОЛЬНИК. ДЕЛЬТОИД

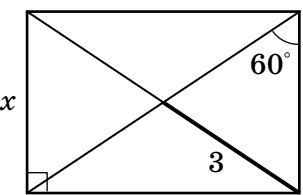
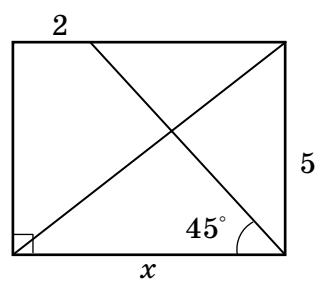
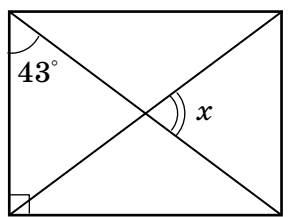
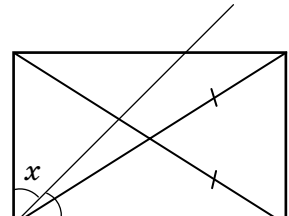
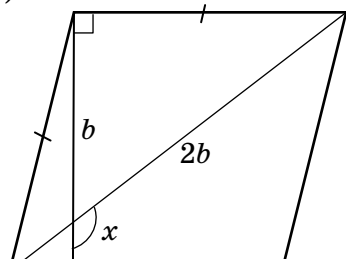
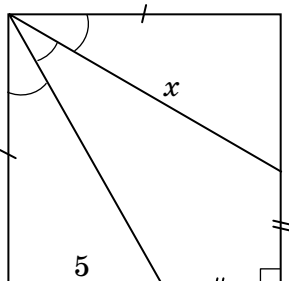
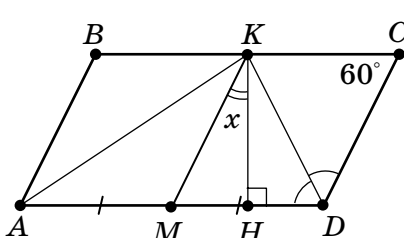
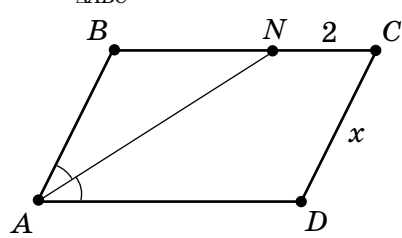
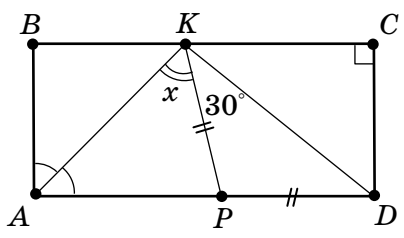
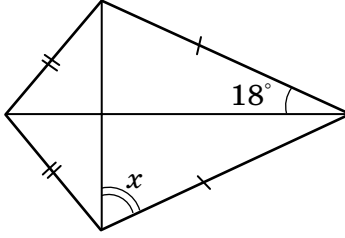
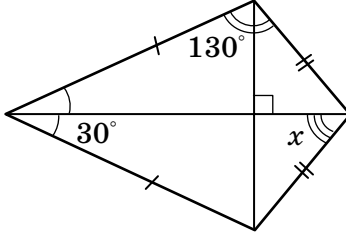
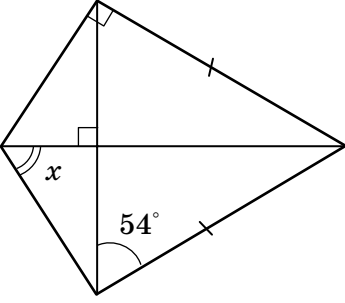


Важно знать:

- **Параллелограмм** – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.
- **Свойства параллелограмма:**
 - ◆ противоположные стороны параллелограмма равны
 - ◆ противоположные углы параллелограмма равны
 - ◆ диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам
 - ◆ биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник
 - ◆ биссектрисы углов параллелограмма при одной стороне пересекаются под прямым углом
- **Признаки параллелограмма:**
 - ◆ если две стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник – параллелограмм
 - ◆ если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм
 - ◆ если противоположные углы четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм
 - ◆ если диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник – параллелограмм
- **Ромб** – это параллелограмм, все стороны которого равны.
- **Дополнительные свойства ромба:**
 - ◆ диагонали ромба перпендикулярны
 - ◆ диагонали ромба лежат на биссектрисах его углов
- **Некоторые признаки ромба:**
 - ◆ если в четырёхугольнике все стороны равны, то этот четырёхугольник – ромб
 - ◆ если в параллелограмме две смежные стороны равны, то этот параллелограмм – ромб
 - ◆ если в параллелограмме диагонали перпендикулярны или одна из них делит один угол пополам, то этот параллелограмм – ромб
- **Прямоугольник** – это параллелограмм, у которого все углы равны.
- **Дополнительные свойства прямоугольника:**
 - ◆ диагонали прямоугольника равны
- **Некоторые признаки прямоугольника:**
 - ◆ если в четырёхугольнике все углы прямые, этот четырёхугольник – прямоугольник
 - ◆ если в параллелограмме есть один прямой угол, то этот параллелограмм – прямоугольник
 - ◆ если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник
- **Дельтоид** – это четырёхугольник, имеющий две пары равных смежных сторон.
- **Некоторые свойства дельтоида:**
 - ◆ диагонали дельтоида перпендикулярны
 - ◆ хотя бы одна из диагоналей дельтоида лежит на биссектрисе его углов (если обе – то дельтоид является ромбом)

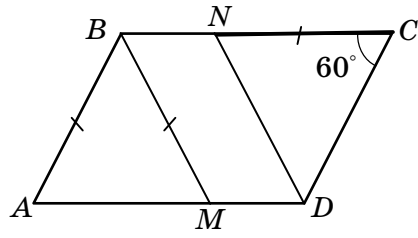
Задание 10. По данным чертежа найдите x (в пунктах 1–21 дан параллелограмм).

1) Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) Ответ: _____
4) Ответ: _____	5) Ответ: _____	6) Ответ: _____
7) Ответ: _____	8) Ответ: _____	9) Ответ: _____
10) Ответ: _____	11) Ответ: _____	12) Ответ: _____

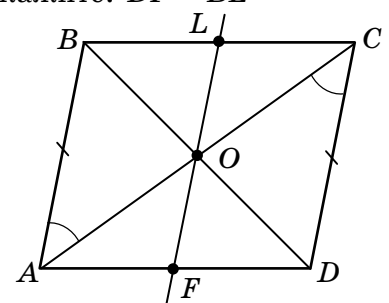
13)  Ответ: _____	14)  Ответ: _____	15)  Ответ: _____
16)  Ответ: _____	17)  Ответ: _____	18)  Ответ: _____
19)  Ответ: _____	20) $P_{\triangle ABC} = 32$  Ответ: _____	21)  Ответ: _____
22)  Ответ: _____	23)  Ответ: _____	24)  Ответ: _____

Задание 11. Выполните задания. Запишите справа краткое решение.

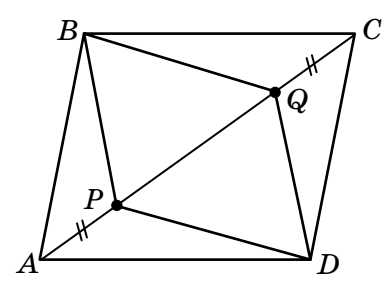
1) $ABCD$ – параллелограмм.
Докажите: $MBND$ – параллелограмм



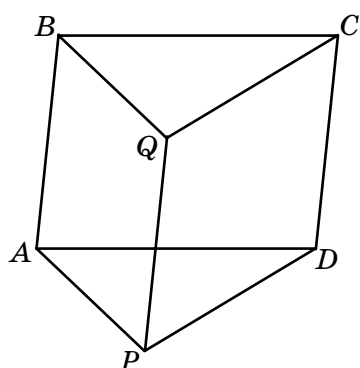
2) Докажите: $DF = BL$



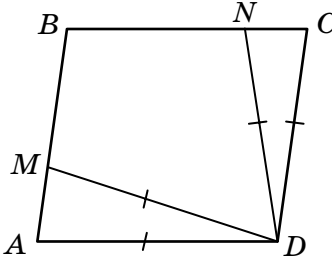
3) $ABCD$ – параллелограмм.
Докажите: $BQDP$ – параллелограмм



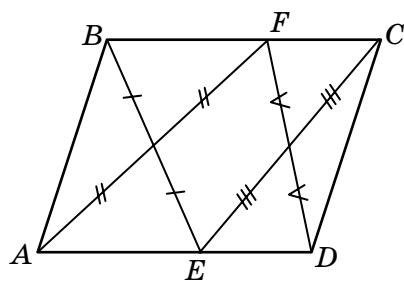
4) $ABQP, PQCD$ – параллелограммы.
Докажите: $ABCD$ – параллелограмм



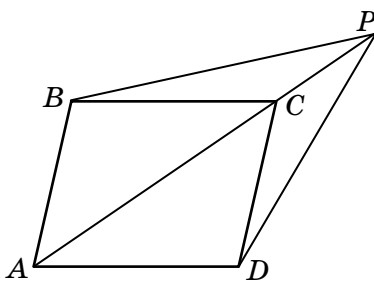
5) $ABCD$ – параллелограмм.
Докажите: MN перпендикулярна BD



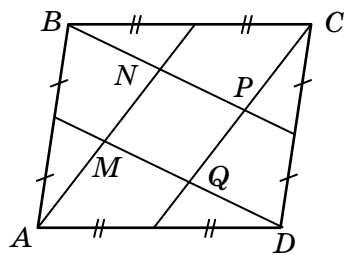
6) Докажите: $\angle ABC = \angle ADC$



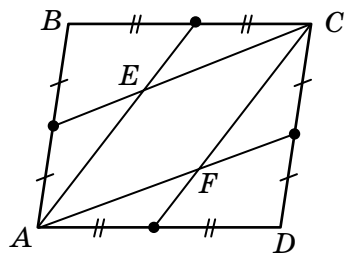
7) $ABCD$ – ромб.
Докажите: $DABP$ – дельтоид



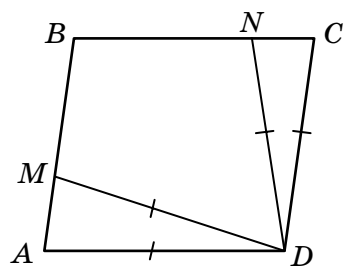
8) Докажите: $MNPQ$ – параллелограмм



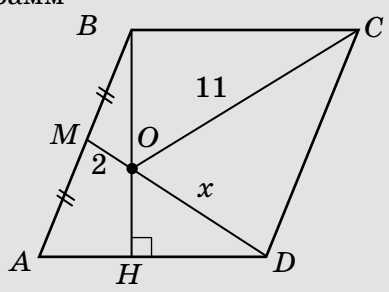
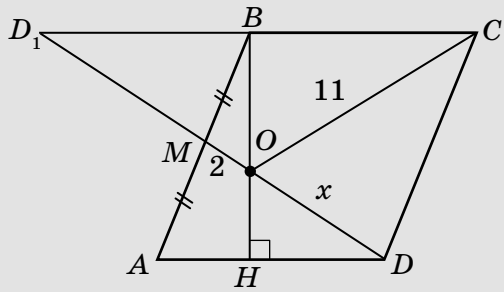
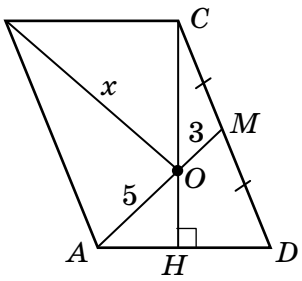
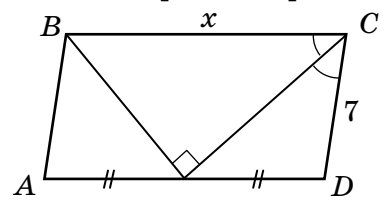
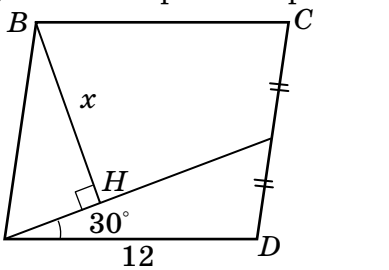
9) Докажите: $AECF$ – параллелограмм



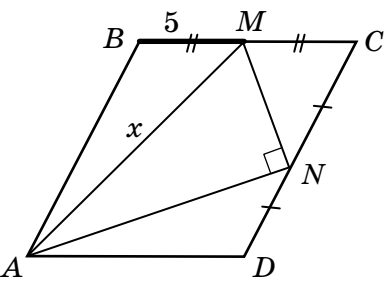
10) $ABCD$ – параллелограмм
Докажите: угол DMB равен углу BND



Задание 12. Найдите неизвестную величину x . Для решения задач используйте дополнительное построение.

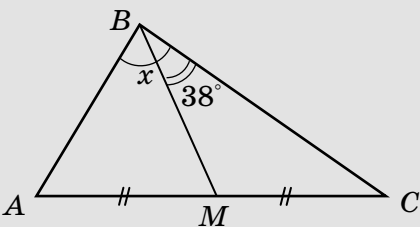
Пример: $ABCD$ – параллелограмм 	Решение: Продлим отрезок DM до пересечения с прямой BC. Тогда треугольники AMD и BMD_1 равны. Используя свойства параллелограмма, получаем $BD_1 = AD = BC$. По свойству параллельных прямых $OB \perp CD_1$. Таким образом имеем: BO – высота и медиана треугольника COD_1, следовательно, этот треугольник равнобедренный, то есть $D_1O = OC$. Отсюда $D_1M = 11 - 2 = 9$. Тогда $x = DO = DM - 2 = MD_1 - 2 = 9 - 2 = 7$. Ответ: 7. 
1) $ABCD$ – параллелограмм 	Ответ: _____
2) $ABCD$ – параллелограмм 	Ответ: _____
3) $ABCD$ – параллелограмм 	Ответ: _____

4) $ABCD$ – параллелограмм



Ответ: _____

Пример: BM – медиана треугольника ABC . $BC = 2BM$



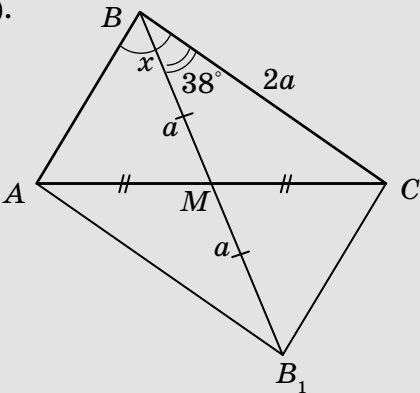
Решение. Удвоим медиану BM . Полученный четырёхугольник $ABCB_1$ – параллелограмм (диагонали точкой пересечения делятся пополам).

$\triangle B_1BC$ равнобедренный, значит

$$\angle B_1MC = \frac{180^\circ - 38^\circ}{2} = 71^\circ.$$

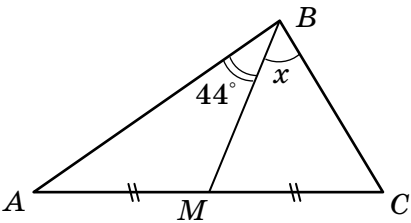
Но по свойствам параллелограмма

$$\angle ABM = \angle B_1MC = 71^\circ, \\ \text{а значит } x = 71^\circ + 38^\circ = 109^\circ.$$



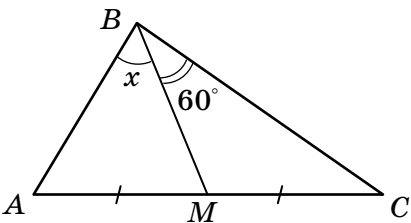
Ответ: 109° .

5) BM – медиана треугольника ABC . $AB = 2BM$



Ответ: _____

6) BM – медиана треугольника ABC . $BC = 4BM$



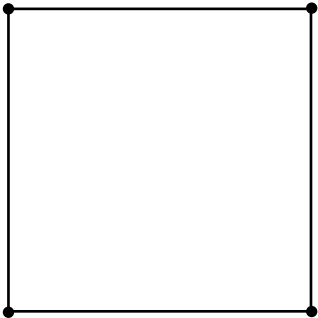
Ответ: _____

Задание 13. Проверьте себя.

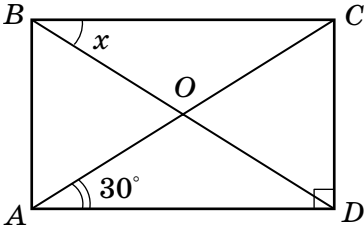
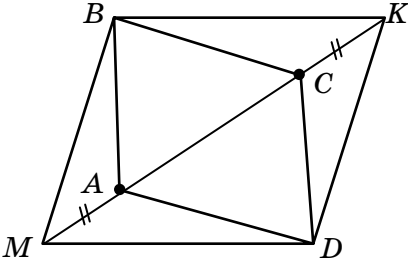
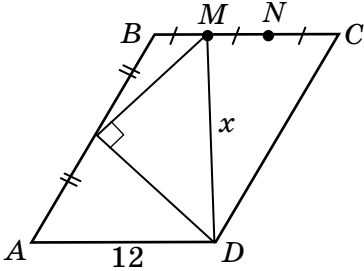
А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Могут ли три диагонали выпуклого пятиугольника пересекаться в одной точке?	
2) Могут ли три диагонали выпуклого шестиугольника пересекаться в одной точке?	
3) Могут ли три диагонали выпуклого семиугольника пересекаться в одной точке?	
4) Могут ли все углы выпуклого четырёхугольника быть острыми?	
5) Верно ли, что в параллелограмме $ABCD$ отрезки AC и BD обязательно равны?	
6) Может ли выпуклый пятиугольник иметь четыре прямых угла?	
7) Верно ли, что если в четырёхугольнике две стороны параллельны, а две другие стороны равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм?	
8) Может ли какое-то свойство квадрата не выполняться для ромба?	
9) Существует ли квадрат, вершины которого лежат на сторонах данного ромба (по одной вершине на каждой стороне)?	
10) Верно ли, что если в четырёхугольнике есть две пары равных сторон, то этот четырёхугольник – параллелограмм?	
11) Существует ли четырёхугольник с разными диагоналями, все стороны которого равны?	
12) Верно ли, что если диагональ четырёхугольника делит его на два равных треугольника, то этот четырёхугольник – параллелограмм?	
13) Существует ли параллелограмм, одна диагональ которого лежит на биссектрисе его углов, а другая – нет?	
14) Существует ли ромб, в котором одна диагональ вдвое больше другой?	
15) Верно ли, что диагонали прямоугольника разбивают его на две пары равных равнобедренных треугольников?	
16) Верно ли, что все высоты ромба равны?	

Б) Разрежьте квадрат на 3 части, из которых можно сложить треугольник с тремя разными острыми углами.



В) Выполните задания, записав краткое решение.

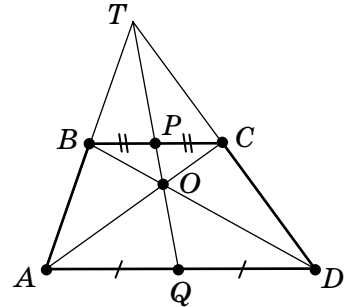
1) $ABCD$ – параллелограмм. Найдите величину x 	Ответ: _____
2) $ABCD$ – ромб. Докажите, что $BKDM$ – параллелограмм 	Ответ: _____
3) $ABCD$ – параллелограмм. Найдите величину x 	Ответ: _____

ТРАПЕЦИЯ



Важно знать:

- **Трапеция** – это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – не параллельны. Иными словами – две стороны параллельны, но не равны.
- В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны и диагонали равны.
- В равнобедренной трапеции высоты, проведённые из вершин меньшего основания, отсекают равные треугольники.
- Трапеция является равнобедренной, если углы при её основании равны или равны её диагонали.
- Биссектрисы углов при одной боковой стороне перпендикулярны и пересекаются на средней линии трапеции.
- Середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.



Важно знать:

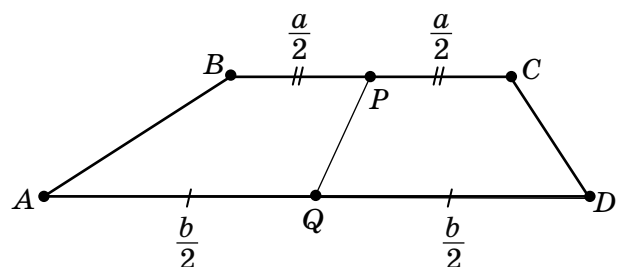
- Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, этот треугольник – прямоугольный.

Задание 14. Существует ли трапеция с основаниями a, b и боковыми сторонами m, n ?

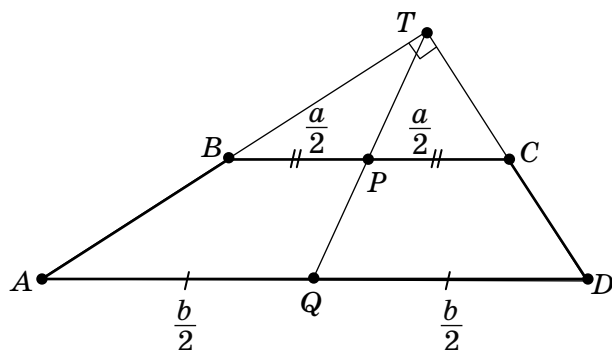
	$a = 12$ $b = 18$	$a = 5$ $b = 8$	$a = 9$ $b = 13$
$m = 6, n = 10$			
$m = 4, n = 7$			
$m = 10, n = 5$			

Задание 15. Заполните пропуски в доказательстве некоторых свойств трапеции.

1) Докажите, что, если сумма углов при основании трапеции равна 90° , то длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна полуразности оснований: $PQ = \frac{b-a}{2}$ (обратите внимание на дополнительные построения).

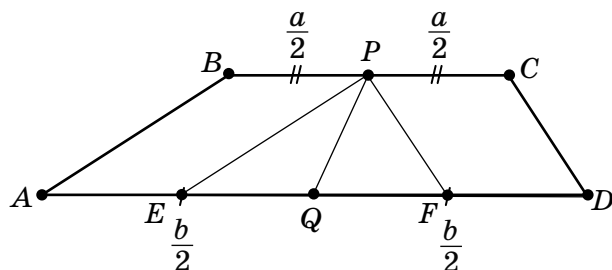


1 способ: Продлим боковые стороны до пересечения в точке T (см. чертёж). Тогда по свойству трапеции точки _____ лежат на одной прямой. При этом $\angle ATD$ прямой (так как _____), и TP – медиана треугольника _____, а TQ – медиана треугольника _____.



Тогда по _____ $TP = \frac{a}{2}$, $TQ = \frac{b}{2}$, откуда $PQ = \frac{b-a}{2}$.

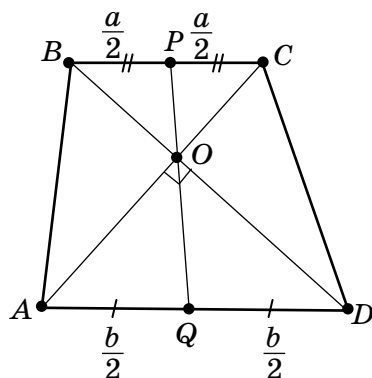
2 способ: Через точку P проведём прямые, параллельные боковым сторонам трапеции (см. чертёж). Тогда $ABPE$, $FPCD$ – параллелограммы (по _____).



Получаем: $\angle EPF$ прямой (так как _____), $AE = FD = \frac{a}{2}$. Значит $EQ = QF = \frac{b-a}{2}$. Тогда PQ – медиана

прямоугольного треугольника, то есть $PQ = \frac{1}{2} EF = EQ = \frac{b-a}{2}$.

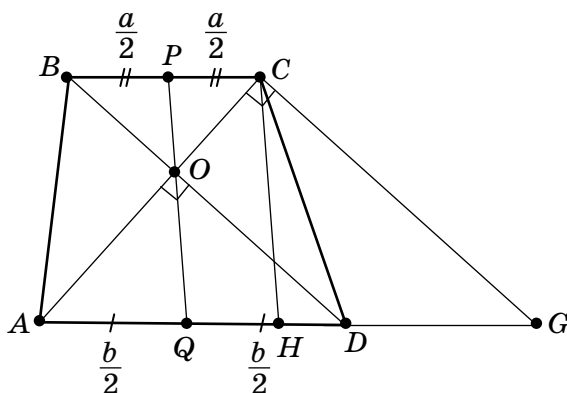
2) Докажите, что, если диагонали трапеции перпендикулярны, то длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна полусумме оснований: $PQ = \frac{b+a}{2}$ (обратите внимание на дополнительные построения).



Решение: Через точку C проведём прямую, параллельную диагонали BD , и прямую, параллельную PQ (см. чертёж).

Тогда $QPCH$, $DBCG$ – параллелограммы (по _____), а значит $DG = BC = \frac{a}{2}$, $QH = PC = \frac{a}{2}$. При этом $\angle ACG$ прямой.

Рассмотрим $\triangle ACG$. В нём $AH = AQ + QH = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} = \frac{b+a}{2}$, то есть CH – медиана



прямоугольного треугольника.

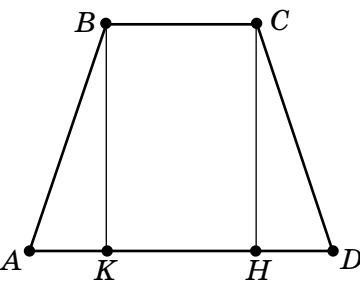
Тогда $CH = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{2} (a+b) = \frac{a+b}{2}$.

Задание 16. $ABCD$ – трапеция. Найдите неизвестную величину x .

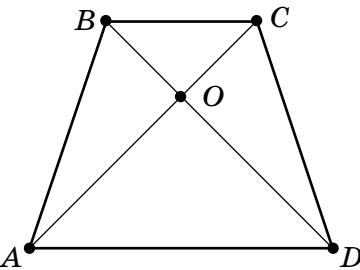
1) $AD = x$ Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) $AD = 11, BC = 5, PQ = x$ Ответ: _____
4) Ответ: _____	5) Ответ: _____	6) Ответ: _____
7) Ответ: _____	8) $CH = x$ Ответ: _____	9) Ответ: _____
10) Ответ: _____	11) Ответ: _____	12) Ответ: _____

Задание 17. Дана трапеция $ABCD$. Выполните задания.

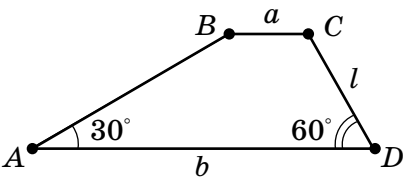
1) $AH = KD$
Докажите: $\angle ABC = \angle DCB$



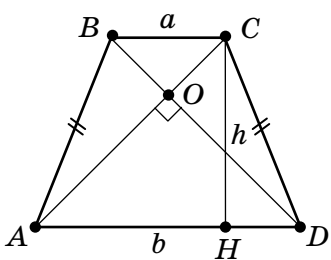
2) $AO = OD$
Докажите: $AB = CD$



3) Докажите, что $b - a = l$

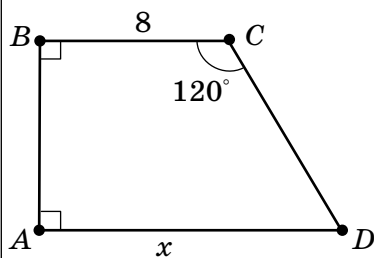


4) Докажите: $h = \frac{a + b}{2}$



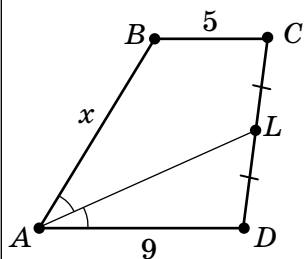
Задание 18. Дана трапеция $ABCD$. Выполните задания.

1) Найдите x

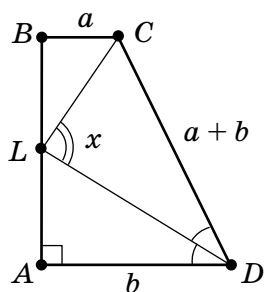


Ответ: _____

2) Найдите x

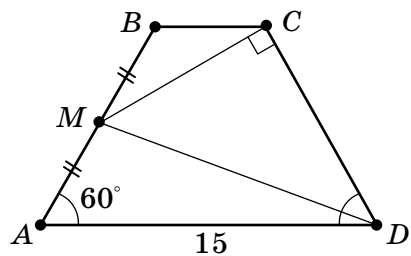


Ответ: _____

3) Найдите x 

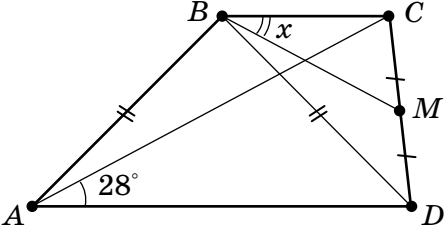
Ответ: _____

4) Найдите периметр $ABCD$



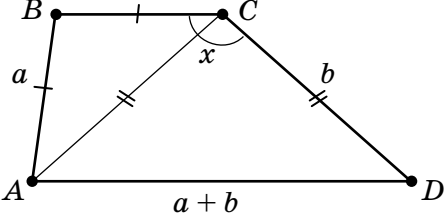
Ответ: _____

5) Найдите x



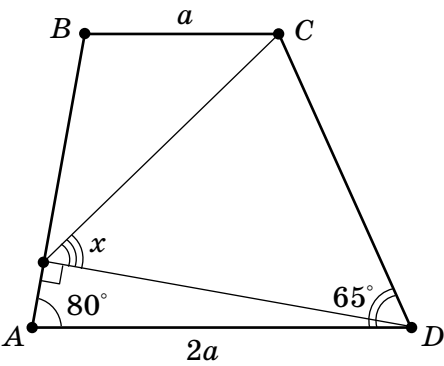
Ответ: _____

6) Найдите x



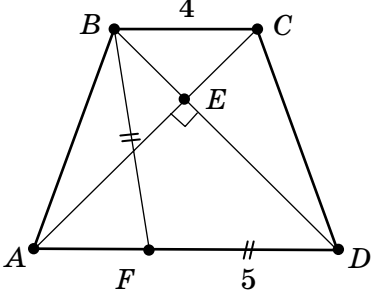
Ответ: _____

7) Найдите x



Ответ: _____

8) Найдите AD



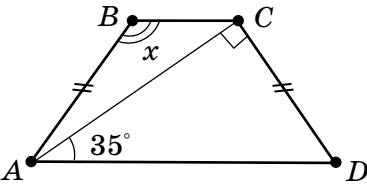
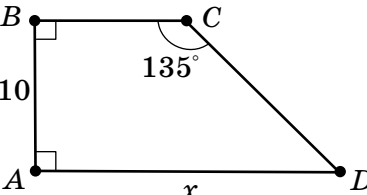
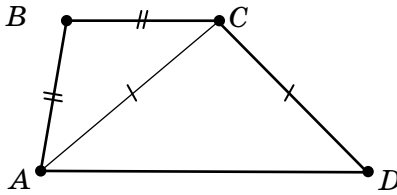
Ответ: _____

Задание 19. Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Могут ли три стороны трапеции быть равными?	
2) Могут ли основания трапеции быть равны?	
3) Может ли боковая сторона трапеции быть больше, чем большее основание?	
4) Может ли трапеция иметь два равных противоположных угла?	
5) Могут ли в трапеции два противоположных угла быть тупыми?	
6) Может ли в трапеции быть три тупых угла?	
7) Могут ли боковые стороны прямоугольной трапеции быть равными?	
8) Может ли диагональ трапеции являться биссектрисой угла трапеции?	

Б) Дана трапеция $ABCD$. Найдите x .

1) $x = \angle ABC$  Ответ: _____	2) $x = AD$  Ответ: _____	3) $x = \angle BAD$  Ответ: _____
--	--	---

В) Длины сторон трапеции (в каком-то порядке) равны 3, 7, 9, 11. Чему может быть равна сумма длин боковых сторон трапеции? _____

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ И ОКРУЖНОСТИ



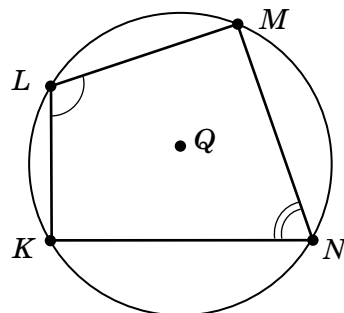
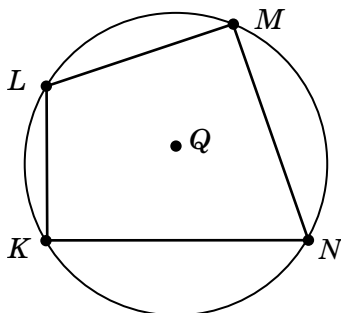
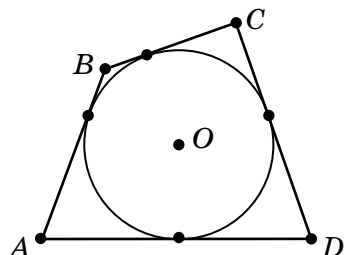
Важно знать:

- **Четырёхугольник можно описать вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны** (при этом центр окружности находится в точке пересечения биссектрис углов четырёхугольника).
- **Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны** (при этом центр окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника). Это условие чаще всего заменяют на «сумма двух противоположных углов равна 180° ».
- **Четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда одна его сторона видна из других вершин под равными углами.**

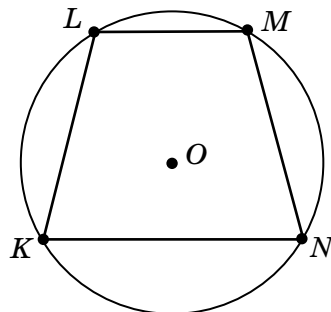
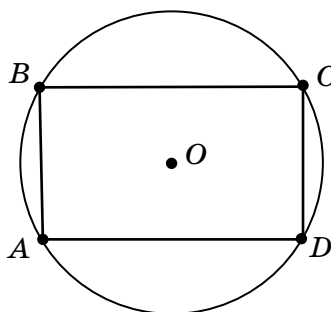
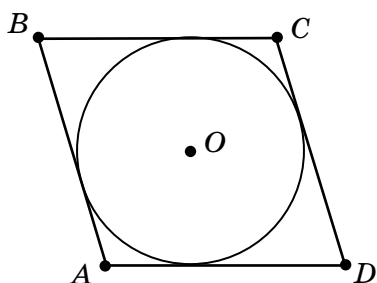
$$AB + CD = BC + DA$$

$$\angle L + \angle N = \angle K + \angle M$$

$$\angle L + \angle N = 180^\circ$$

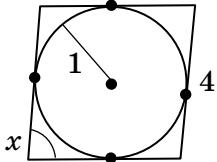
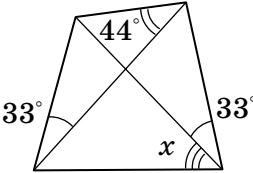
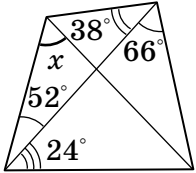
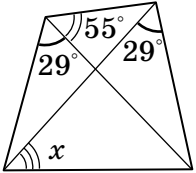
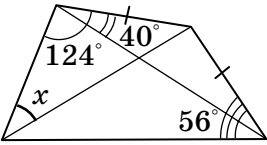
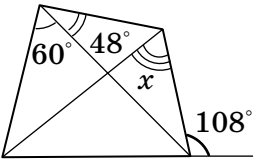
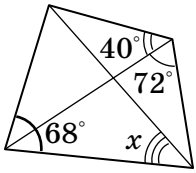
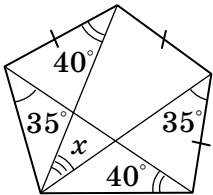
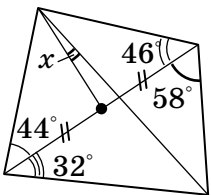
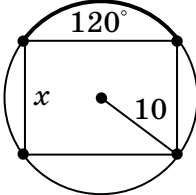
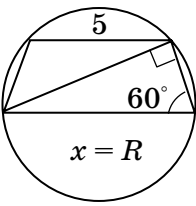
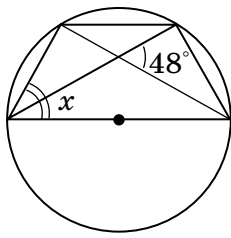
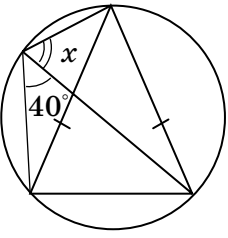
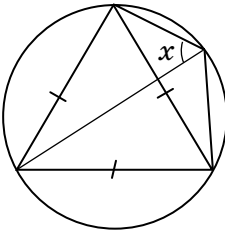
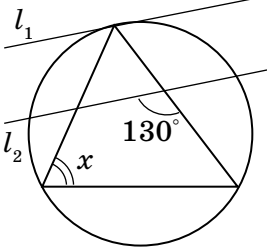
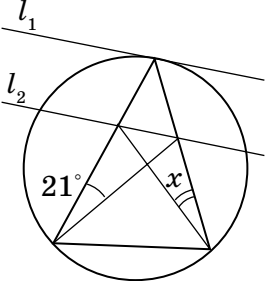


- **Параллелограмм можно описать вокруг окружности тогда и только тогда, когда этот параллелограмм – ромб** (радиус этой окружности равен половине высоты ромба).
- **Параллелограмм можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм – прямоугольник** (радиус этой окружности равен половине диагонали прямоугольника).
- **Трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.**



Задание 20. Найдите x по данным чертежа.

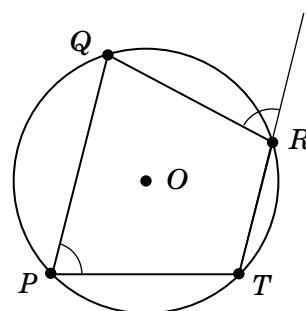
1) Ответ: _____	2) $P = 44$ Ответ: _____	3) Дан параллелограмм Ответ: _____	4) Дана трапеция Ответ: _____
-------------------------------	---	--	---

5) Дан параллелограмм  Ответ: _____	6)  Ответ: _____	7)  Ответ: _____	8)  Ответ: _____
9)  Ответ: _____	10)  Ответ: _____	11)  Ответ: _____	12)  Ответ: _____
13)  Ответ: _____	14) Дан параллелограмм  Ответ: _____	15) Дана трапеция  Ответ: _____	16) Дана трапеция  Ответ: _____
17)  Ответ: _____	18)  Ответ: _____	19) l_1 – касательная, $l_1 \parallel l_2$  Ответ: _____	20) l_1 – касательная, $l_1 \parallel l_2$  Ответ: _____



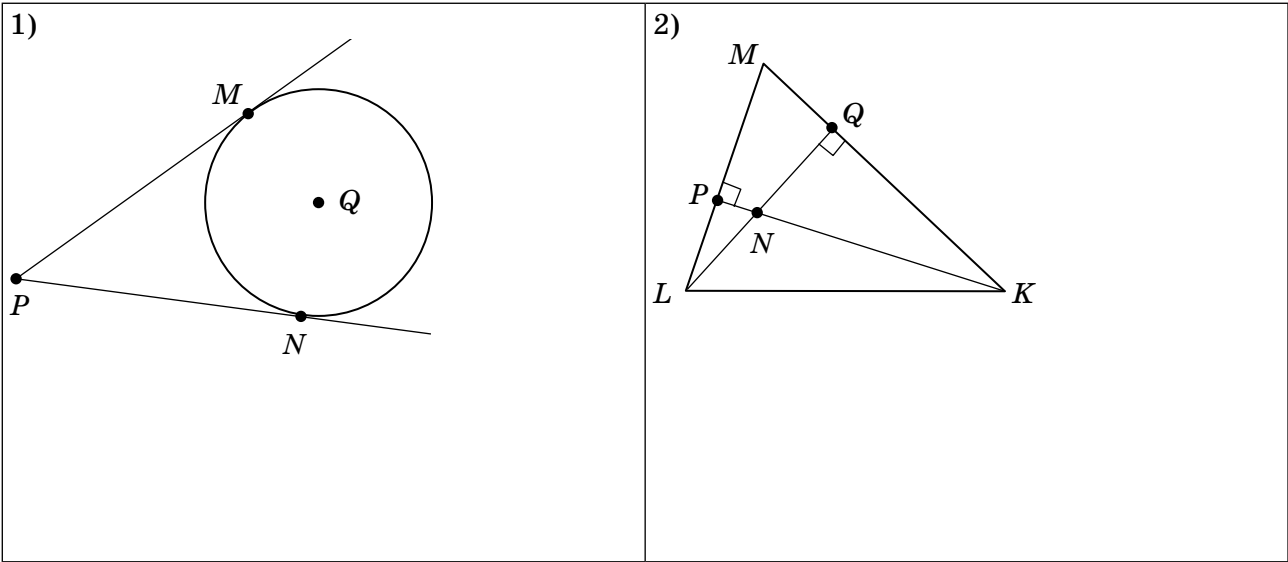
Важно знать:

- **Дополнительный признак вписанного четырёхугольника:** если внешний угол четырёхугольника равен его противоположному внутреннему углу, то этот четырёхугольник можно вписать в окружность. Верно и обратное (свойство вписанного четырёхугольника).



Задание 21. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.

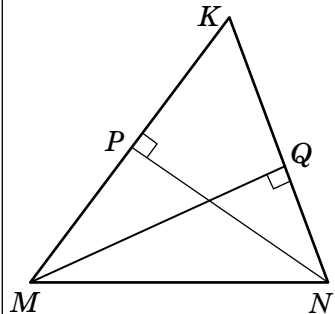
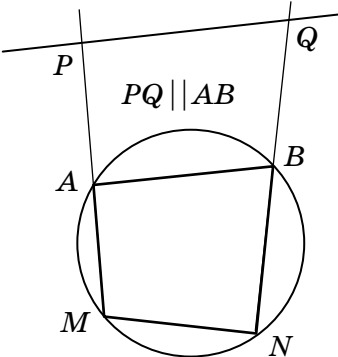
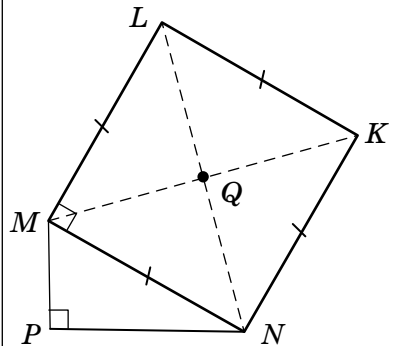
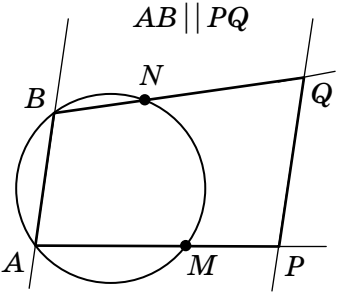
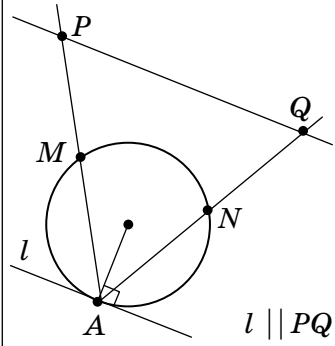
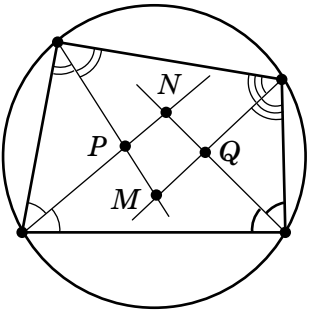
Комментарий: 4 точки лежат на одной окружности, если четырёхугольник с вершинами в этих точках – вписанный четырёхугольник.



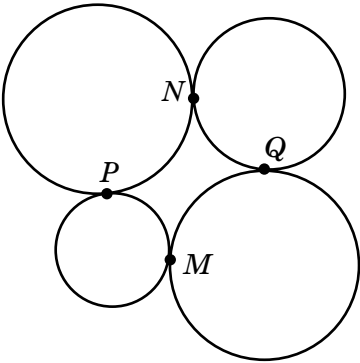
Пример. На каждой стороне треугольника ABC отметили по точке (см. чертёж). Окружности, описанные около треугольников ADE и BEF , второй раз пересекаются в точке G . Докажите, что окружность, описанная около треугольника CDF , тоже проходит через точку G (иными словами: точки C, D, F, G лежат на одной окружности, или четырёхугольник $CDGF$ – вписанный).
Посмотрите три варианта рассуждения и комментарии к ним.

$180^\circ - \alpha$ $180^\circ - \beta$ Наиболее «привычные» свойство и признак – сумма противоположных углов равна 180°: введём обозначения α, β, γ, тогда: $\angle DGF = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta$ Получаем, что в четырёхугольнике $CDGF$ сумма противоположных углов равна $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то есть четырёхугольник – вписанный. И использованы свойство и признак о равенстве 180° суммы противоположных углов четырёхугольника	Если продлить EG и применить свойство вписанного четырёхугольника, получаем углы, равные α и β, то есть $\angle DGF = \alpha + \beta$. Тогда сумма противоположных углов $CDGF$ равна 180°, то есть четырёхугольник – вписанный. Вроде всё то же самое, но не пришлось производить вычислений. И использован признак о равенстве 180° суммы противоположных углов четырёхугольника и свойство о равенстве внутреннего и внешнего углов	Оказывается, если начать рассуждения с другого угла, то, применив два раза свойство и один раз признак о внешнем угле, получаем, что $CDGF$ – вписанный. Не пришлось не только считать, но даже вводить переменные для углов. И использованы свойство и признак о равенстве внутреннего и внешнего углов четырёхугольника
---	---	---

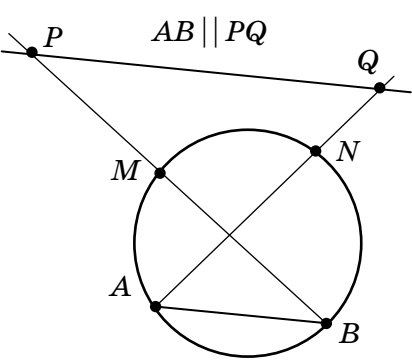
Выбирая подходящий признак вписанного четырёхугольника, продолжите выполнение задания 21.

3) Решение: 	4) Решение: 
5) Решение: 	6) Решение: 
7) Решение: 	8) Решение: 

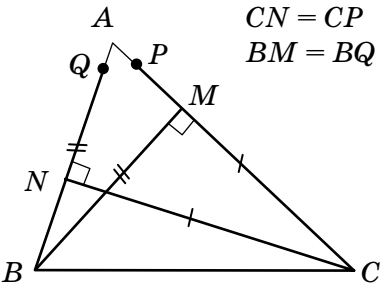
9) Решение:



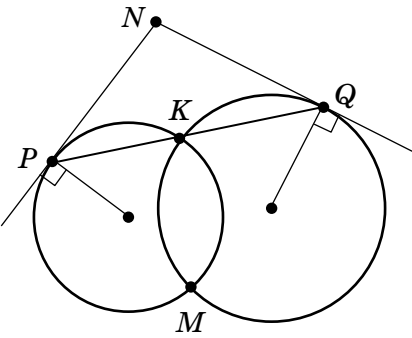
10) Решение:



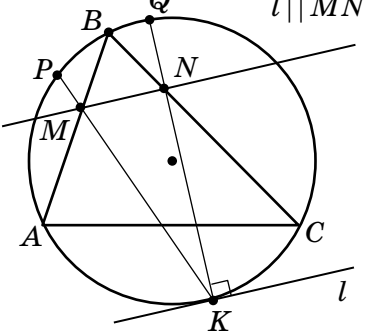
11) Решение:



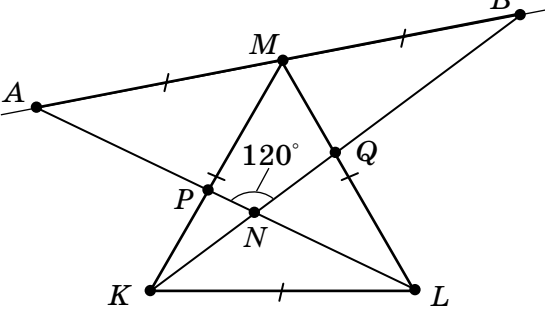
12) Решение:



13) Решение:



14) Решение:

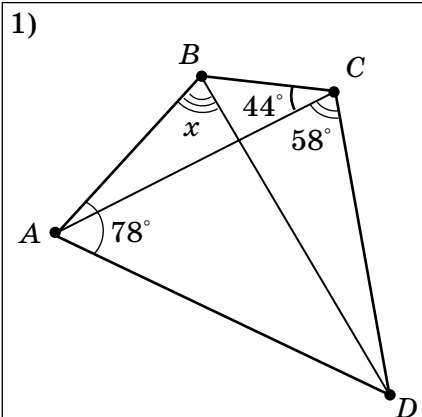


Задание 22. Проверьте себя.

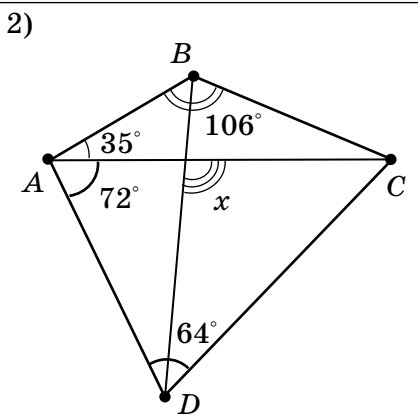
А) Заполните таблицу, вписав «да» / «нет».

	всегда мож- но вписать окружность	иногда мож- но вписать окружность, иногда – нет	всегда мож- но описать окружность	иногда мож- но описать окружность, иногда – нет
квадрат				
произвольная трапеция				
равнобедренная трапеция				
прямоугольная трапеция				
трапеция, диагонали кото- рой равны				
произвольный паралле- лограмм				
параллелограмм, смежные стороны которого равны				
параллелограмм, имеющий прямой угол				
параллелограмм, диагона- ли которого равны				
дельтоид				

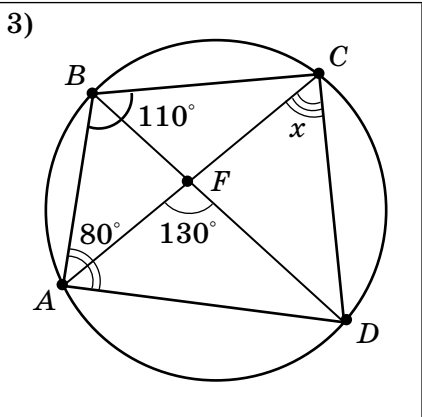
Б) Найдите x по данным чертежа.

1)

Ответ: _____

2)

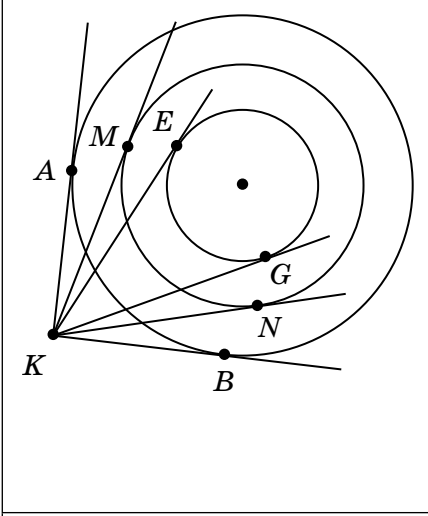
Ответ: _____

3)

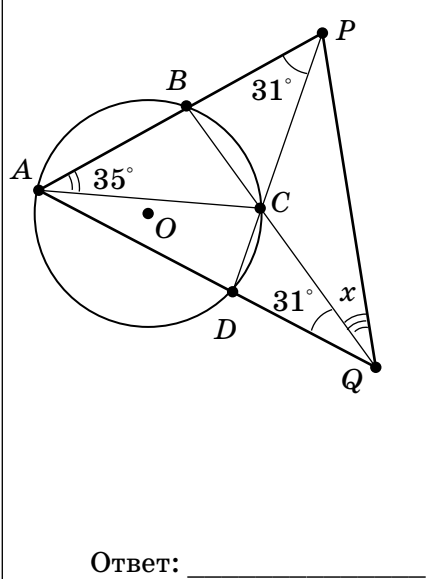
Ответ: _____

В) Выполните задания, запишите краткие решения.

1) Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной окружности

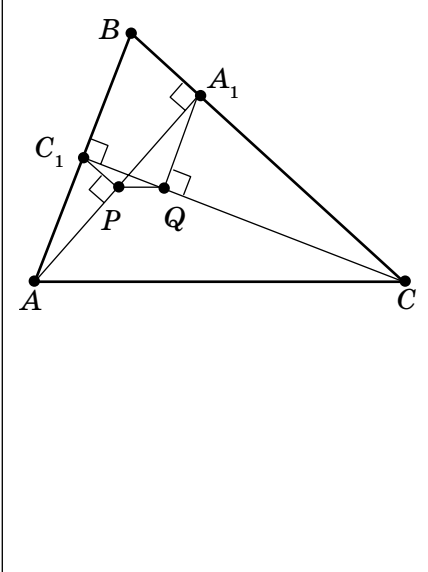


2) Найдите x



Ответ: _____

3) Докажите, что $PQ \parallel AC$



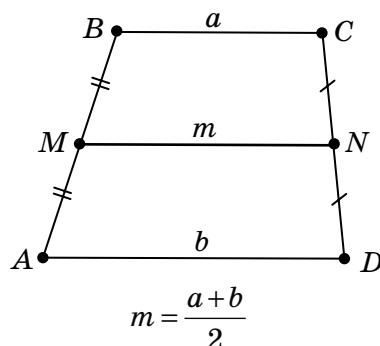
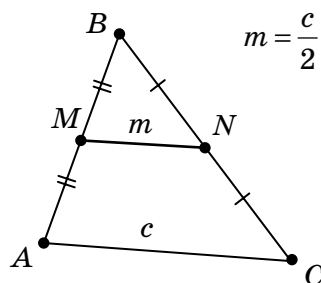
СРЕДНИЕ ЛИНИИ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

СРЕДНИЕ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТРАПЕЦИИ



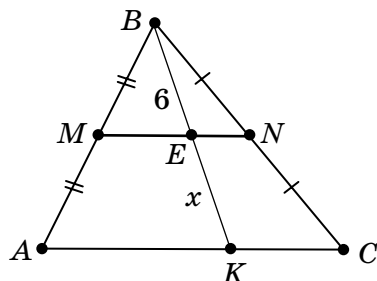
Важно знать:

- **Средняя линия треугольника** – это отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.
 - ♦ Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна её половине.
 - ♦ Средняя линия треугольника делит пополам любой отрезок, один конец которого лежит на прямой, содержащей параллельную средней линии сторону, а другой – в противоположащей ей вершине треугольника.
 - ♦ Если прямая проходит через середину одной стороны треугольника параллельно другой стороне, то третью сторону она пересекает посередине (то есть её отрезок – средняя линия треугольника).
- **Средняя линия трапеции** – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.
 - ♦ Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.
 - ♦ Средняя линия трапеции делит пополам любой отрезок с концами на основаниях трапеции.



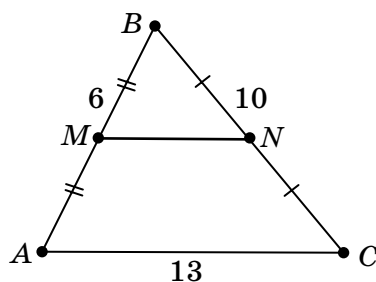
Задание 23. Найдите неизвестную величину по данным чертежа.

1) Найдите x



Ответ: _____

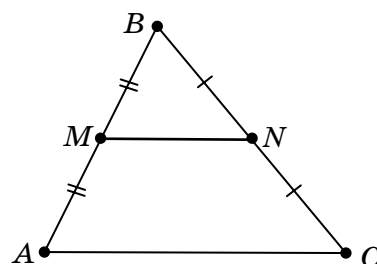
2) Найдите P_{AMNC}



Ответ: _____

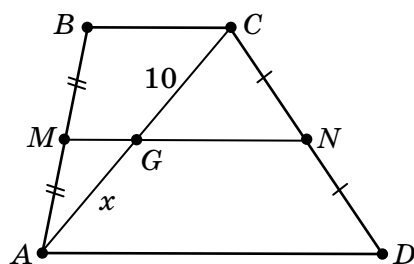
3) $P_{\triangle BMN} = 14$; $P_{AMNC} = 24$

Найдите AC



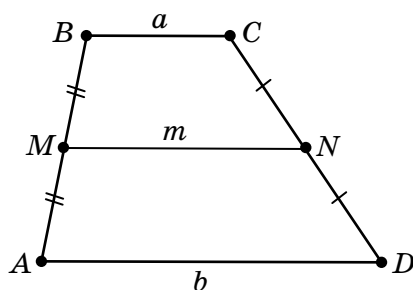
Ответ: _____

4) Дана трапеция. Найдите x



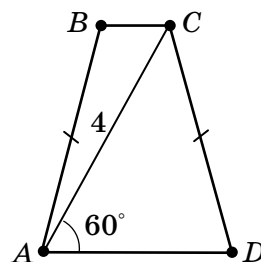
Ответ: _____

5) Дана трапеция, $m = 6$, $b - a = 4$. Найдите a



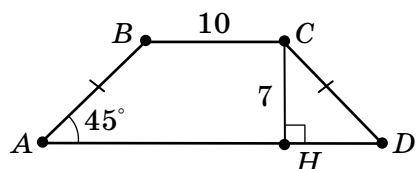
Ответ: _____

6) Дана трапеция. Найдите длину средней линии



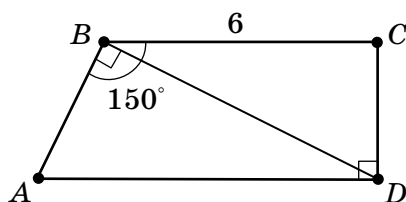
Ответ: _____

7) Дана трапеция. Найдите длину средней линии



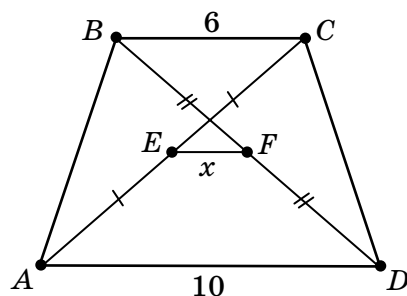
Ответ: _____

8) Дана трапеция. Найдите длину средней линии



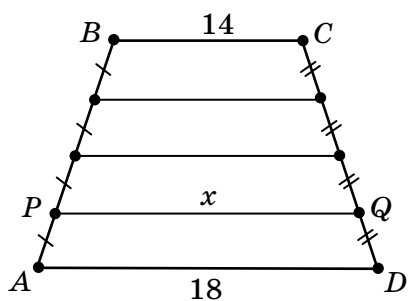
Ответ: _____

9) Дана трапеция. Найдите x



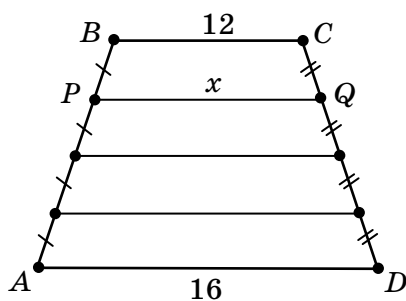
Ответ: _____

10) Дана трапеция. Найдите x



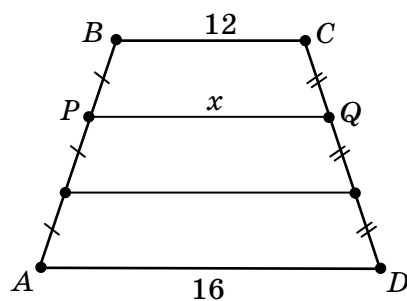
Ответ: _____

11) Дана трапеция. Найдите x



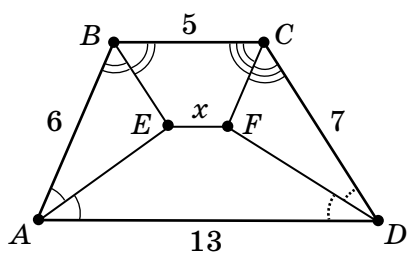
Ответ: _____

12) Дана трапеция. Найдите x



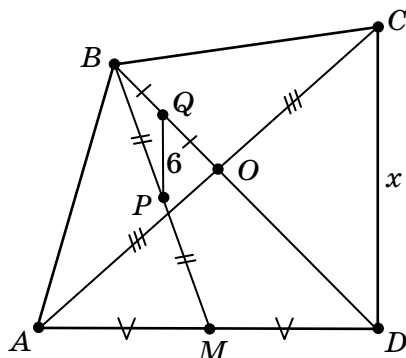
Ответ: _____

13) Дана трапеция. Найдите x



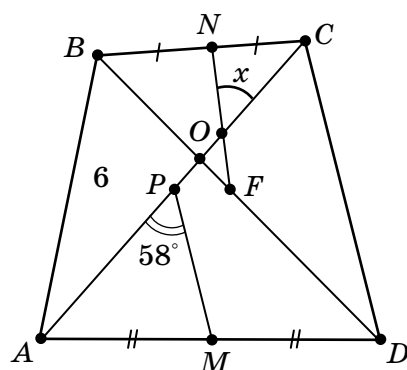
Ответ: _____

14) Найдите x



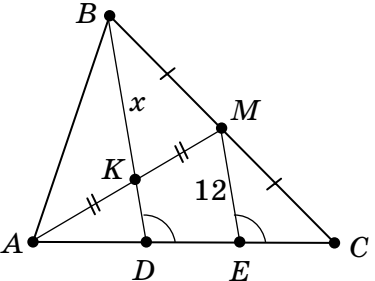
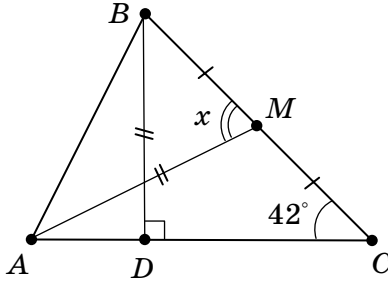
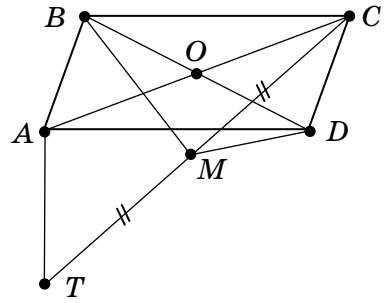
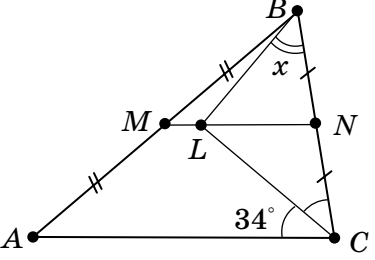
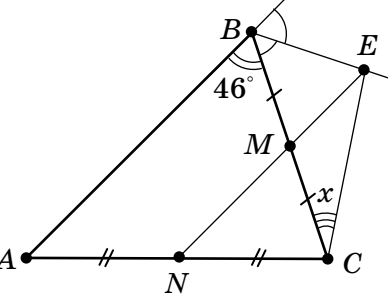
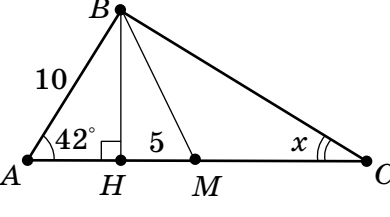
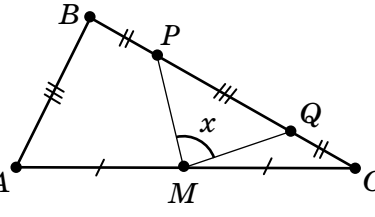
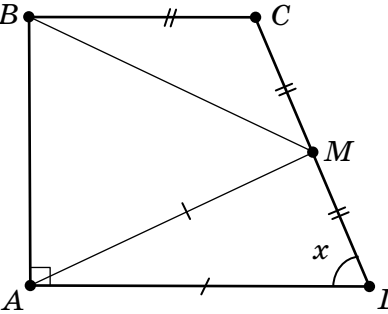
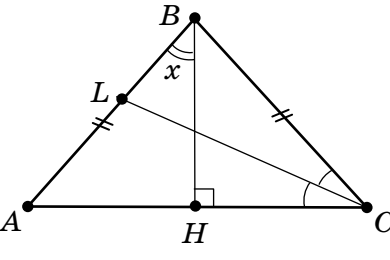
Ответ: _____

15) P и F – середины диагоналей. Найдите x



Ответ: _____

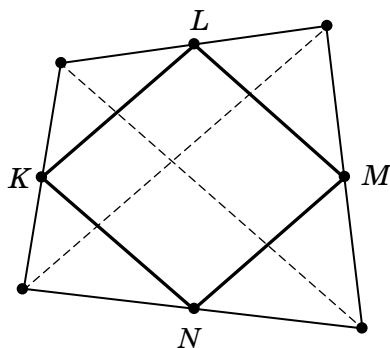
Задание 24. Выполните задания, записав краткие решения.

1)  Ответ: _____	2)  Ответ: _____	3) $ABCD$ – параллелограмм, $BD = AT$. Найдите $\angle BMD$  Ответ: _____
4)  Ответ: _____	5)  Ответ: _____	6) $AM = MC$  Ответ: _____
7)  Ответ: _____	8) $ABCD$ – трапеция  Ответ: _____	9) $AB = BC$, $BH = \frac{1}{2} CL$  Ответ: _____



Важно знать:

- Четырёхугольник с вершинами в серединах сторон данного четырёхугольника является параллелограммом (**параллелограмм Вариньона**). Стороны полученного параллелограмма соответственно параллельны и равны половинам диагоналей исходного четырёхугольника.

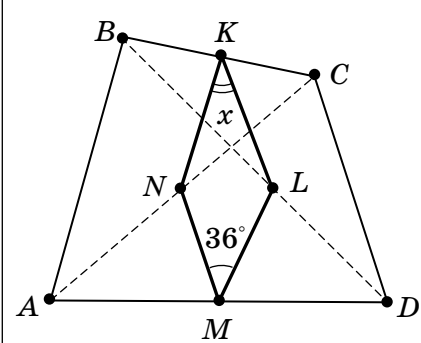


Задание 25. Дан четырёхугольник $ABCD$. $KLMN$ – четырёхугольник с вершинами в серединах сторон $ABCD$. Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Если $ABCD$ – квадрат, то $KLMN$ – квадрат	
2) Если $KLMN$ – квадрат, то $ABCD$ – квадрат	
3) Если $ABCD$ – прямоугольник, то $KLMN$ – прямоугольник	
4) Если $KLMN$ – квадрат, то $ABCD$ – прямоугольник	
5) Если $KLMN$ – прямоугольник, то $ABCD$ – равнобедренная трапеция	
6) Если диагонали $ABCD$ перпендикулярны, то $KLMN$ – прямоугольник	
7) Если $KLMN$ – прямоугольник и $ABCD$ – параллелограмм, то $ABCD$ – ромб	
8) $KLMN$ – квадрат, то диагонали $ABCD$ перпендикулярны	
9) Если диагонали $ABCD$ равны, то $KLMN$ – ромб	
10) Если $ABCD$ – ромб, то $KLMN$ – квадрат	
11) Если диагонали $ABCD$ равны, то $KLMN$ – квадрат	
12) Если диагонали $ABCD$ перпендикулярны, то $KLMN$ – квадрат	
13) Если $KLMN$ – ромб, то диагонали $ABCD$ – равны	
14) Если $KLMN$ – квадрат, то диагонали $ABCD$ равны	
15) Если $ABCD$ – ромб, то $KLMN$ – прямоугольник	

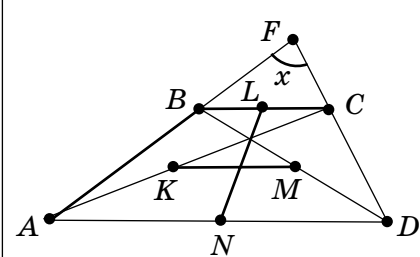
Задание 26. K, L, M, N – середины соответствующих отрезков. Найдите неизвестную величину.

1) N, L – середины диагоналей



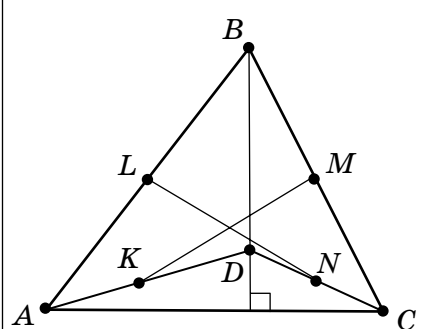
Ответ: _____

2) K – середина AC , M – середина BD , $KM = LN$



Ответ: _____

3) $KM = 8$. Найдите NL

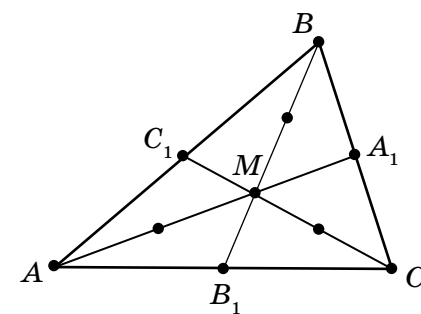


Ответ: _____



Важно знать:

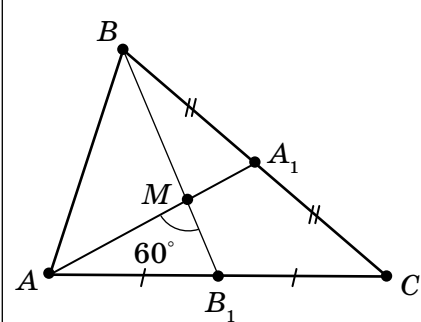
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 к 1, считая от вершины.



Задание 27. Выполните задания.

1) $AA_1 = 18, BB_1 = 36$.

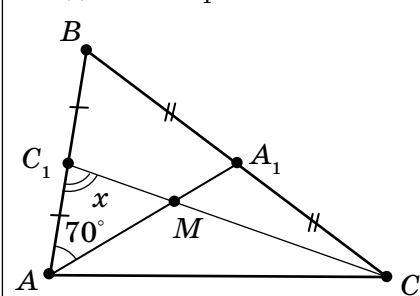
Найдите AC



Ответ: _____

2) $AA_1 = 15, CC_1 = 30$.

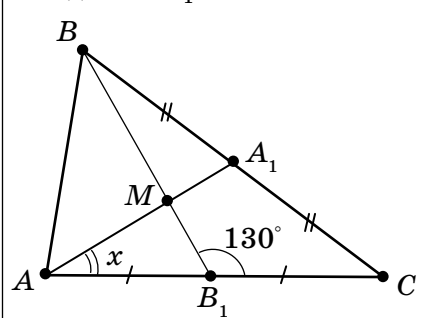
Найдите $\angle AC_1C$



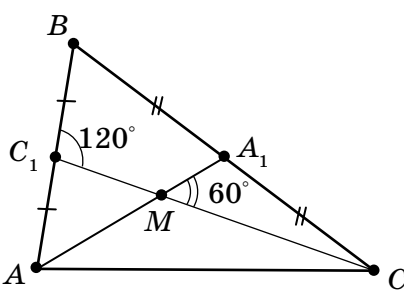
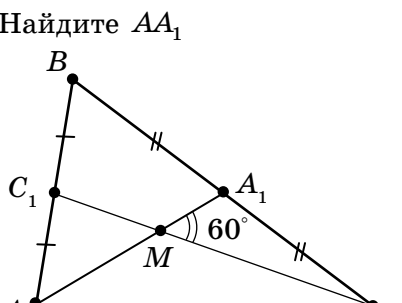
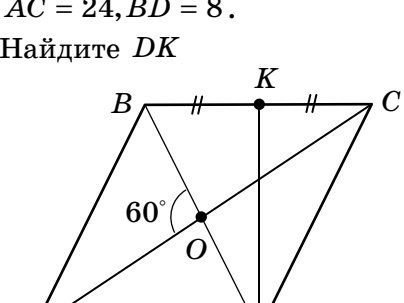
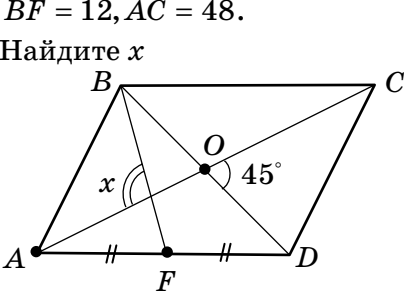
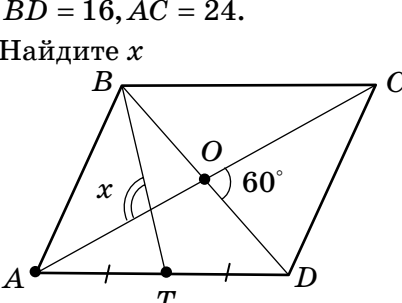
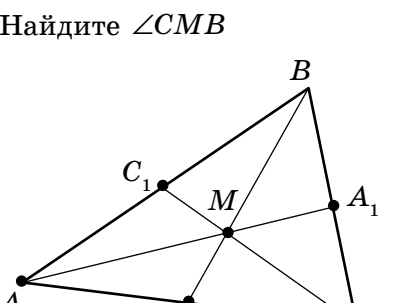
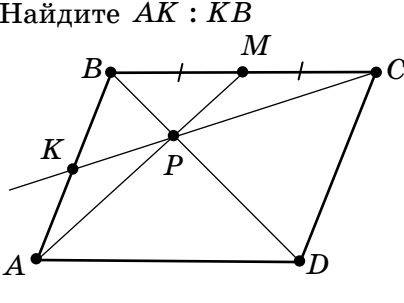
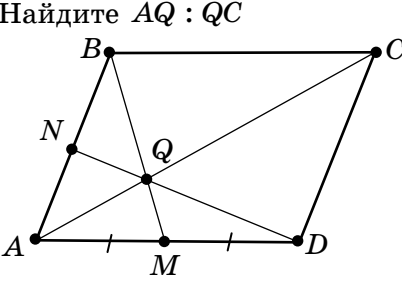
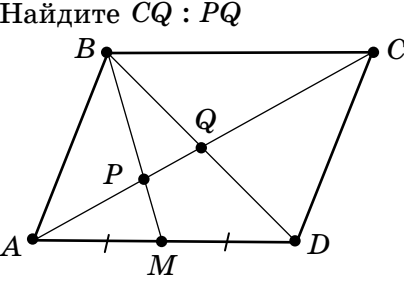
Ответ: _____

3) $AA_1 = 12, BB_1 = 24$.

Найдите $\angle A_1AC$

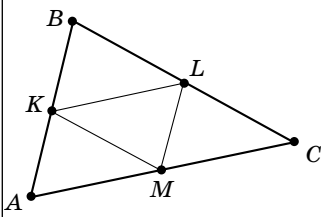
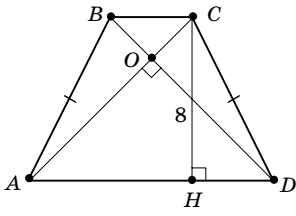
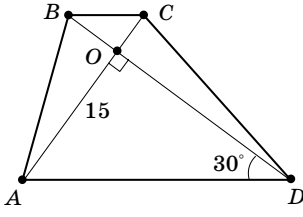
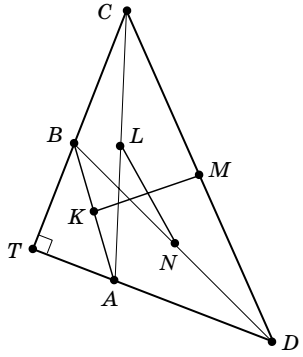


Ответ: _____

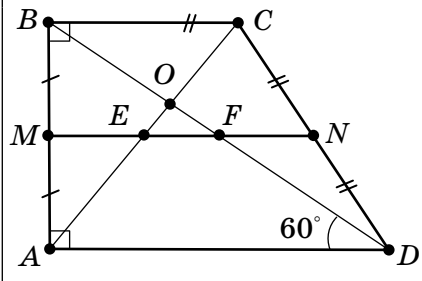
4) $AA_1 = 15$. Найдите CC_1  Ответ: _____	5) $CC_1 = 12, AB = 8$. Найдите AA_1  Ответ: _____	6) $ABCD$ – параллелограмм, $AC = 24, BD = 8$. Найдите DK  Ответ: _____
7) $ABCD$ – параллелограмм, $BF = 12, AC = 48$. Найдите x  Ответ: _____	8) $ABCD$ – параллелограмм, $BD = 16, AC = 24$. Найдите x  Ответ: _____	9) $AA_1 = 1,5 BC$. Найдите $\angle CMB$  Ответ: _____
10) $ABCD$ – параллелограмм. Найдите $AK : KB$  Ответ: _____	11) $ABCD$ – параллелограмм. Найдите $AQ : QC$  Ответ: _____	12) $ABCD$ – параллелограмм. Найдите $CQ : PQ$  Ответ: _____

Задание 28. Проверьте себя.

А) Выполните задания.

1) Отмечены середины сторон. Периметр $\triangle KLM$ равен 12. Найдите периметр $\triangle ABC$.  Ответ: _____	2) Дана трапеция, известна длина высоты. Найдите длину средней линии.  Ответ: _____	3) Дана трапеция. Найдите длину средней линии.  Ответ: _____	4) $KM = 12$, K, L, M, N – середины отрезков. Найдите LN.  Ответ: _____
---	--	--	---

Б) Найдите неизвестные величины.

	MN	ME	EF	FN

В) Отметьте галочкой верные утверждения.

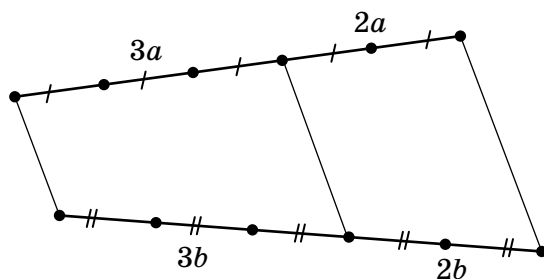
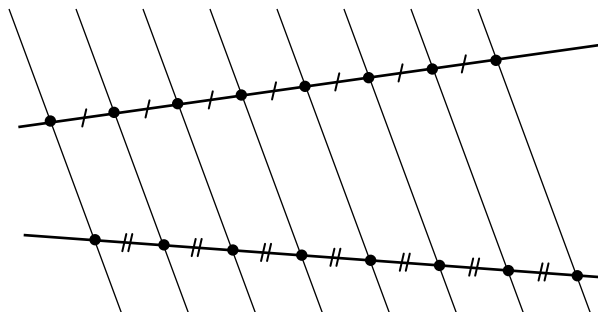
1) Прямая, проходящая через середины двух сторон треугольника, параллельна одной из сторон треугольника.	
2) Прямая, проходящая через середины диагоналей трапеции, параллельна её основаниям.	
3) Прямая, проходящая через середину треугольника и точку пересечения медиан, является средней линией треугольника.	
4) Если средняя линия равна половине стороны треугольника, не параллельной ей, треугольник является равнобедренным.	
5) Периметр треугольника, образованного средними линиями, вдвое меньше периметра исходного треугольника.	
6) Если в четырёхугольнике отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, параллелен одной из сторон, то этот четырёхугольник – трапеция.	
7) Если в четырёхугольнике отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон, параллелен одной из сторон, то этот четырёхугольник может быть трапецией, может быть дельтоидом, может быть параллелограммом.	

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

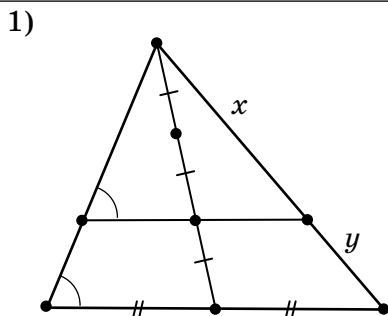


Важно знать:

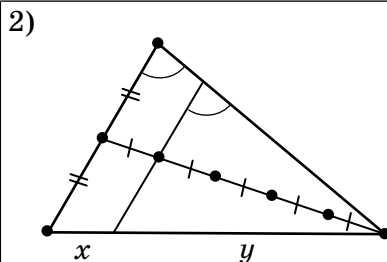
- Если на одной прямой отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые, то при пересечении другой прямой они отсекают равные между собой отрезки (теорема Фалеса).
- Иногда удобно пользоваться теоремой Фалеса, не проводя все параллельные прямые (см. чертёж).



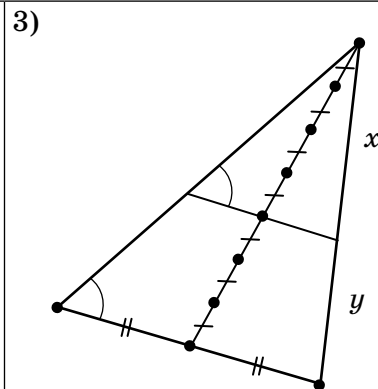
Задание 29. Найдите отношение $x : y$, проводя прямые, параллельные данным. Ответ принято давать в виде отношения взаимно простых целых чисел (например, $4 : 7$).



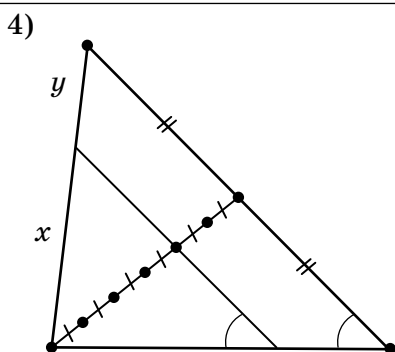
Ответ: $x : y = \underline{\hspace{2cm}}$



Ответ: $x : y = \underline{\hspace{2cm}}$

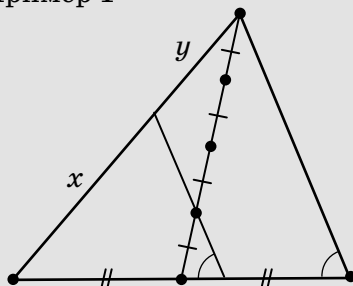


Ответ: $x : y = \underline{\hspace{2cm}}$

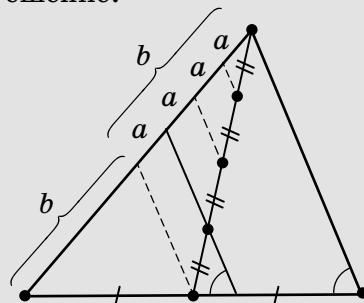


Ответ: $x : y = \underline{\hspace{2cm}}$

Пример 1

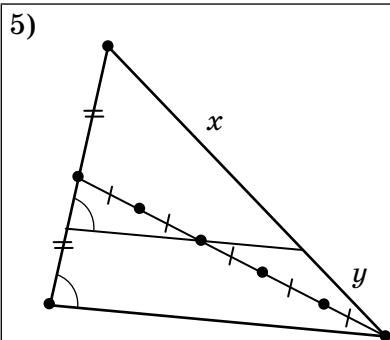


Решение:

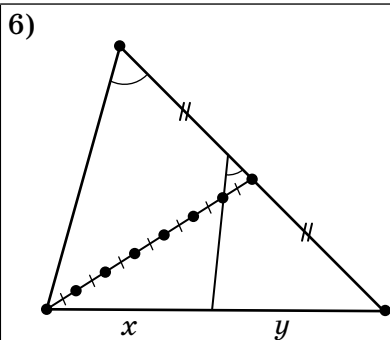


$$b = 4a, \\ x : y = (b + a) : 3a = 5 : 3$$

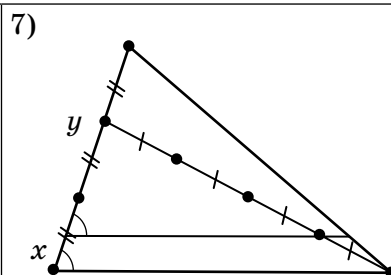
Ответ: $x : y = 5 : 3$



Ответ: $x : y =$ _____

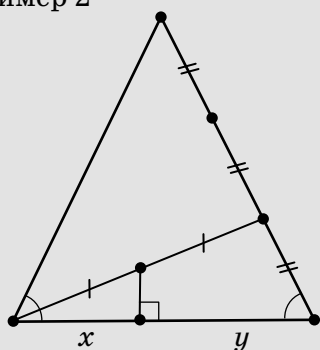


Ответ: $x : y =$ _____



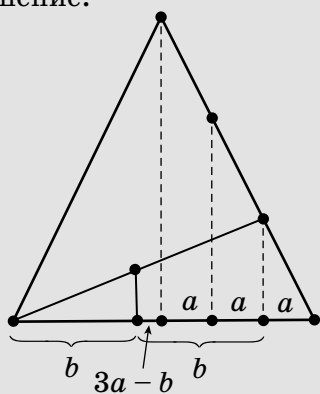
Ответ: $x : y =$ _____

Пример 2



Ответ: $x : y = 5 : 7$

Решение:

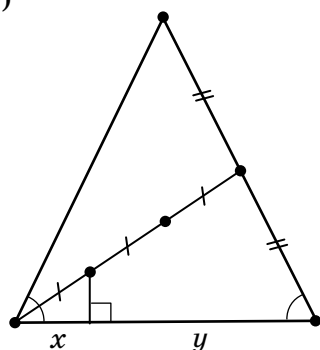


$$3a - b + 2a = b$$

$$b = 2,5a$$

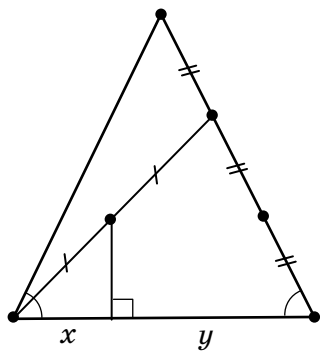
$$x : y = 2,5a : 3,5a = 5 : 7$$

8)



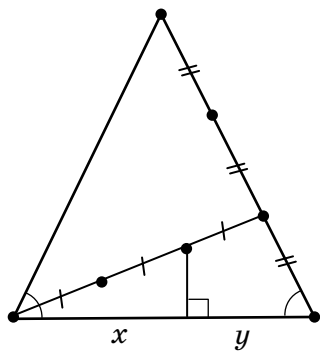
Ответ: $x : y =$ _____

9)



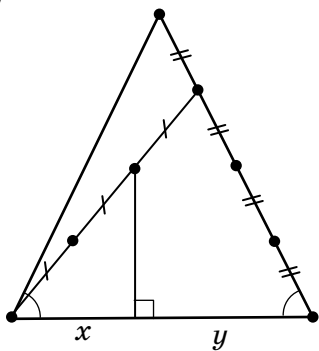
Ответ: $x : y =$ _____

10)

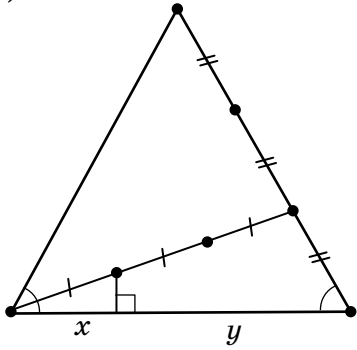
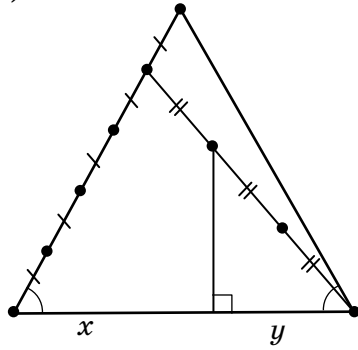
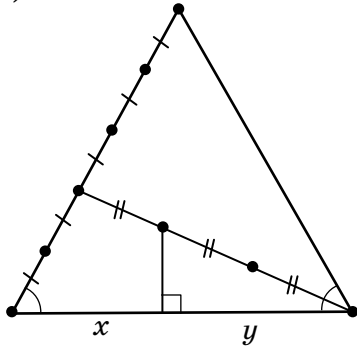


Ответ: $x : y =$ _____

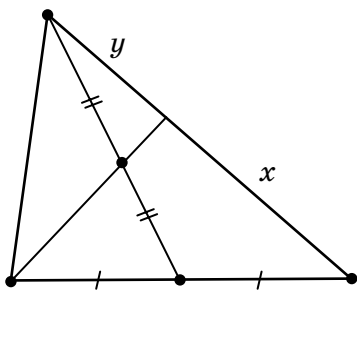
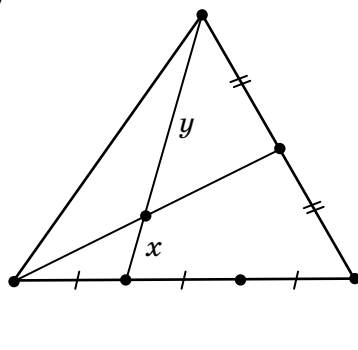
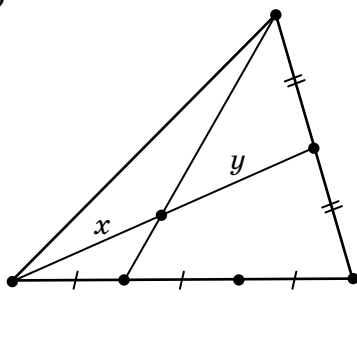
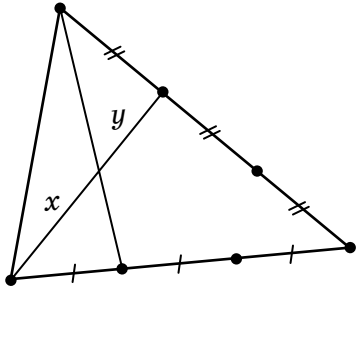
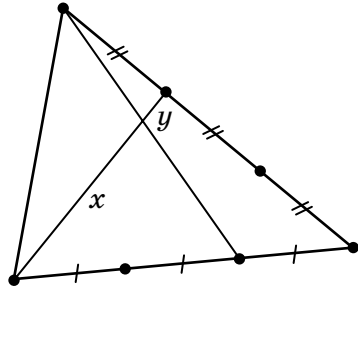
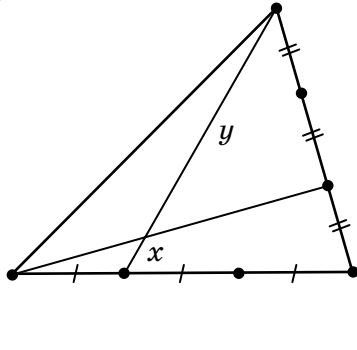
11)



Ответ: $x : y =$ _____

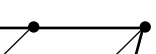
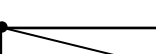
12)  Ответ: $x : y =$ _____	13)  Ответ: $x : y =$ _____	14)  Ответ: $x : y =$ _____
---	---	--

Задание 30. Найдите отношение $x : y$, проводя вспомогательные параллельные прямые.

1)  Ответ: $x : y =$ _____	2)  Ответ: $x : y =$ _____	3)  Ответ: $x : y =$ _____
4)  Ответ: $x : y =$ _____	5)  Ответ: $x : y =$ _____	6)  Ответ: $x : y =$ _____

7) Ответ: $x : y =$ _____	8) Ответ: $x : y =$ _____	9) Ответ: $x : y =$ _____
10) Ответ: $x : y =$ _____	11) Ответ: $x : y =$ _____	12) Ответ: $x : y =$ _____
13) Ответ: $x : y =$ _____	14) Ответ: $x : y =$ _____	15) Ответ: $x : y =$ _____

Задание 31. Найдите отношение длин отрезков, на которые поделена диагональ параллелограмма, если стороны параллелограмма разделены на равные отрезки.

1)  Ответ: _____	2)  Ответ: _____	3)  Ответ: _____	4)  Ответ: _____
---	---	---	---

Задание 32. Проверьте себя.

А) Заполните таблицу.

	$MA : AN$	$NB : BM$	$AM : AB$	$AM : MB$	$MA : BN$
1)					
2)					

Б) Найдите отношение $x : y$.

1)

x y

Ответ: _____

2)

x y

Ответ: _____

3)

x y

Ответ: _____

ПЛОЩАДИ. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

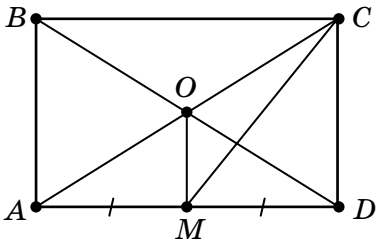
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ



Важно знать:

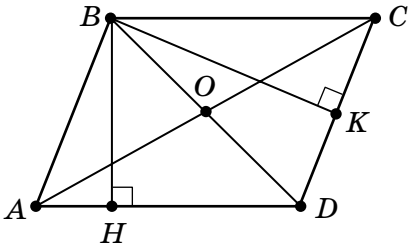
- **Площадь прямоугольника** равна произведению его смежных сторон ($S = ab$).
- **Площадь треугольника** равна половине произведения стороны треугольника и высоты, проведённой к этой стороне $\left(S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a\right)$.
- ♦ **Площадь прямоугольного треугольника** равна половине произведения его катетов.
- **Площадь параллелограмма** равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне ($S = a \cdot h_a$).
- **Площадь трапеции** равна произведению полусуммы её оснований на высоту $\left(S = \frac{a+b}{2} \cdot h\right)$.

Задание 33. Дан прямоугольник $ABCD$. Заполните пропуски в таблице.



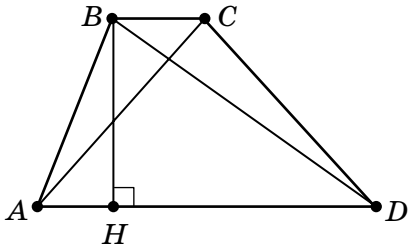
	AB	AD	S_{ABCD}	OM	$S_{\triangle BAO}$	$S_{\triangle AMC}$
1	6	8				
2	10		160			
3	8				30	
4		10		4		
5		8				24
6			60	3		
7	7				21	
8				2		16

Задание 34. Дан параллелограмм $ABCD$. Заполните пропуски в таблице.



	AB	AD	S_{ABCD}	$S_{\triangle DAO}$	$S_{\triangle ABO}$	BH	BK
1	8	16					10
2	12					8	6
3	10	12	60				
4	16			48		8	
5					30	5	12
6	8		72			6	

Задание 35. Дана трапеция $ABCD$. Заполните пропуски в таблице.

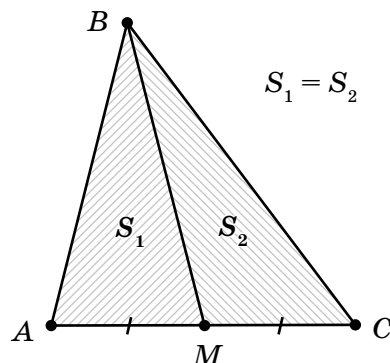
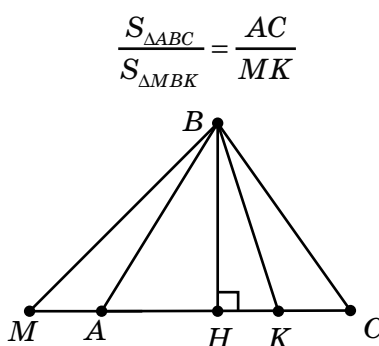
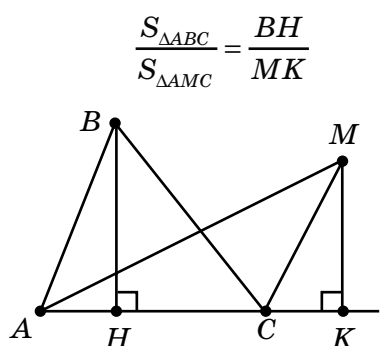


	BC	AD	BH	S_{ABCD}	$S_{\triangle ABC}$	$S_{\triangle ACD}$
1	4	10	6			
2	8		10	120		
3	3	11			6	
4	6		4	34		
5		18	7		7	
6			9		54	63
7		22			36	88



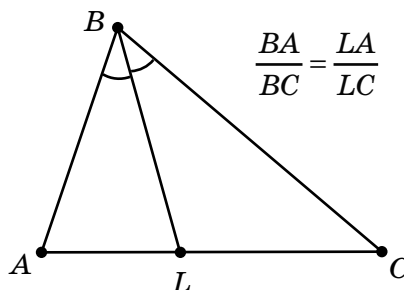
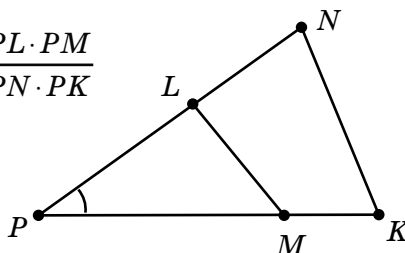
Важно знать:

- Если стороны двух треугольников равны, то их площади относятся как высоты, проведённые к этим сторонам.
- Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как стороны, к которым эти высоты проведены.
- Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.



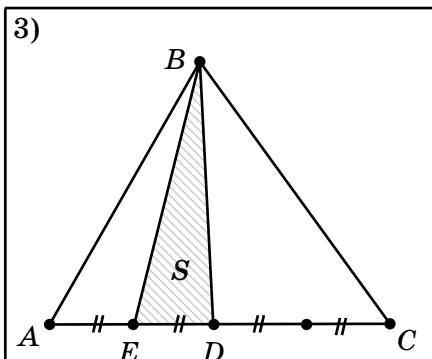
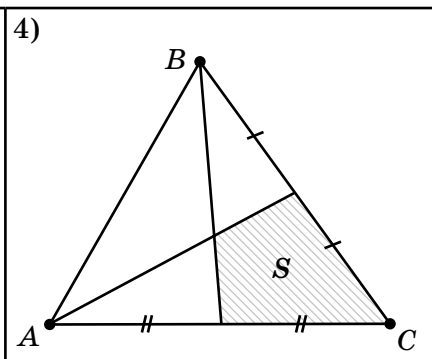
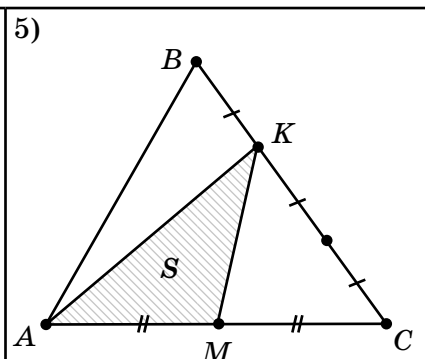
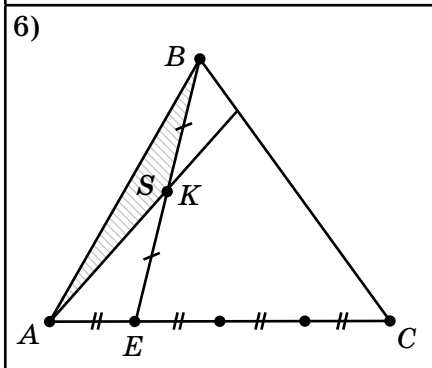
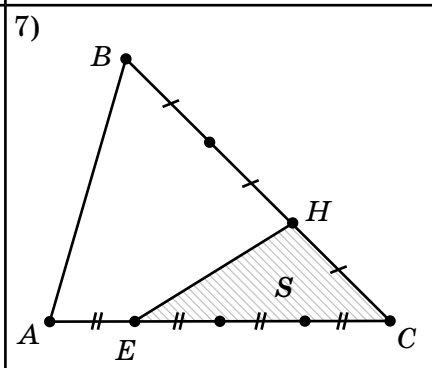
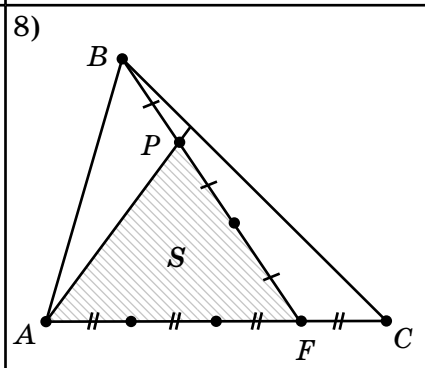
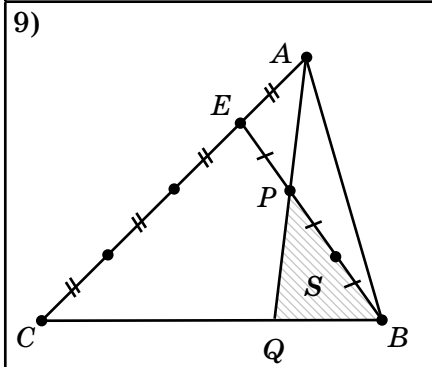
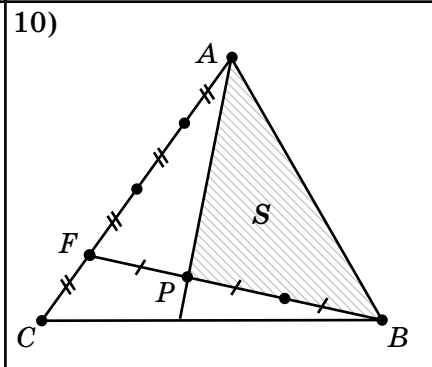
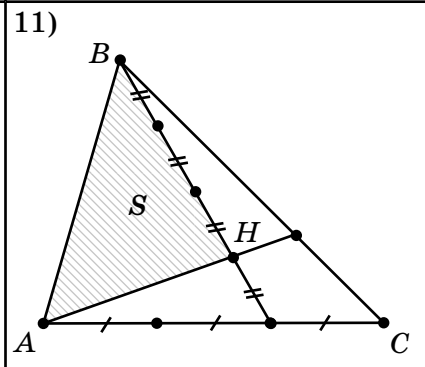
- Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.
- Биссектриса треугольника делит сторону треугольника, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам треугольника.

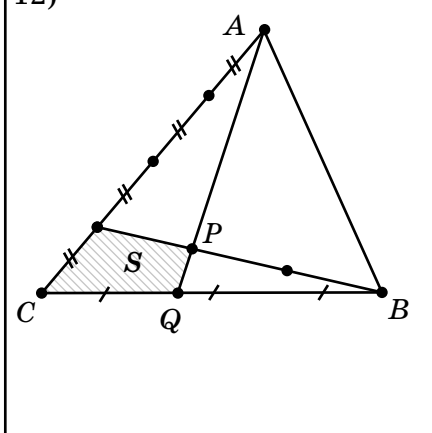
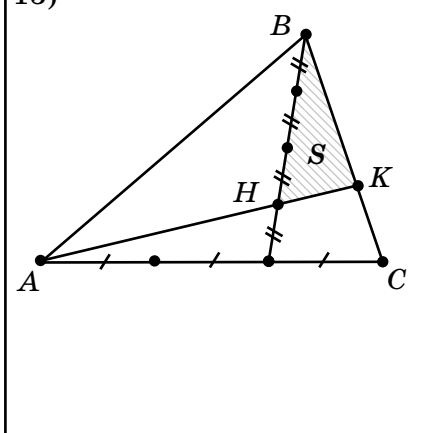
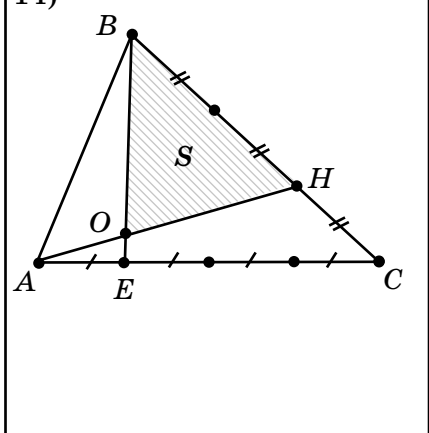
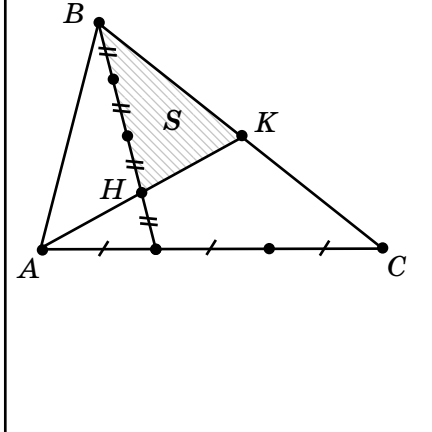
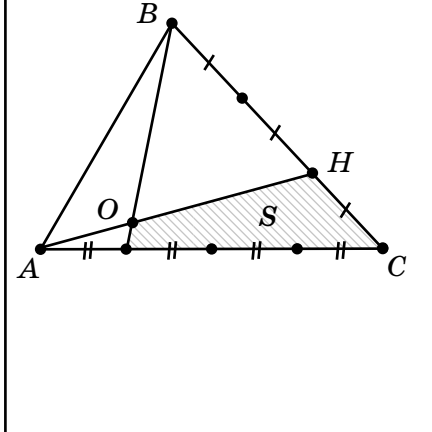
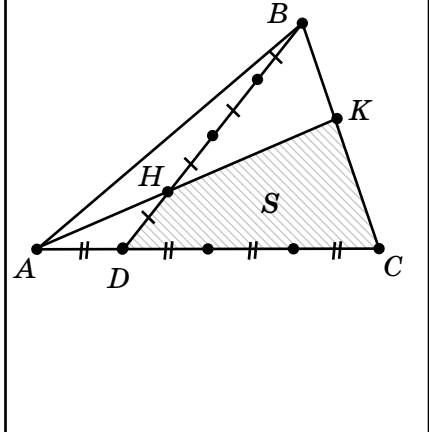
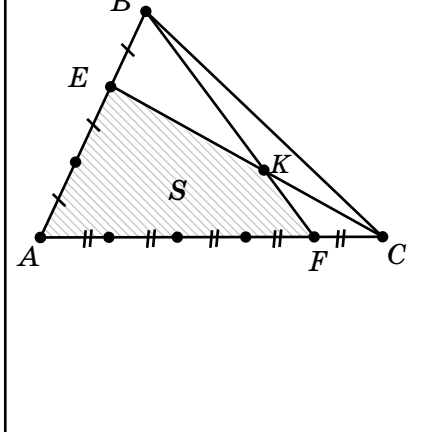
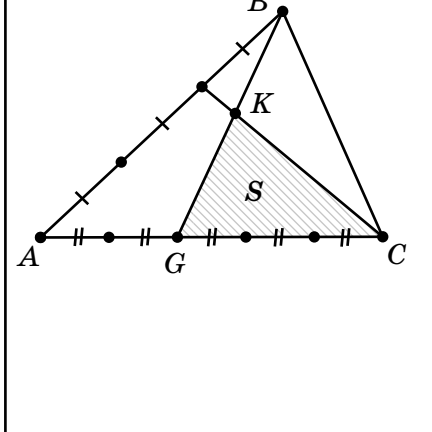
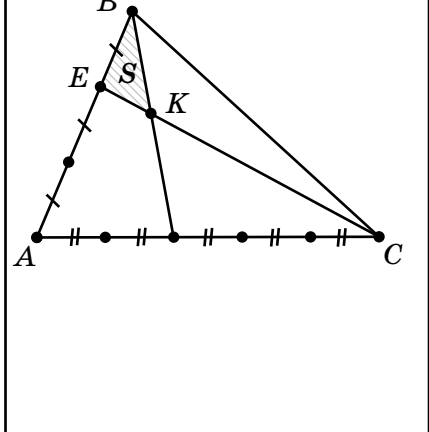
$$\frac{S_{\triangle PLM}}{S_{\triangle NPK}} = \frac{PL \cdot PM}{PN \cdot PK}$$



Задание 36. Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь закрашенной части по данным чертежа.

Решение: $S_{\triangle ABB_1} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, $S = \frac{1}{2} S_{\triangle ABB_1} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABB_1} = \frac{1}{4}$ Ответ: $\frac{1}{4}$	1) Ответ: _____	2) Ответ: _____
--	-------------------------------	-------------------------------

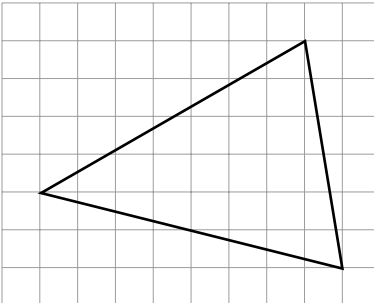
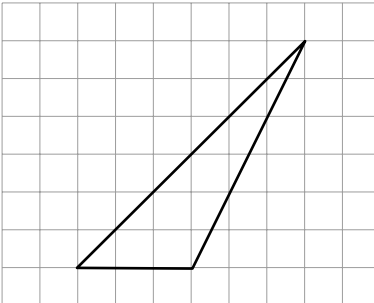
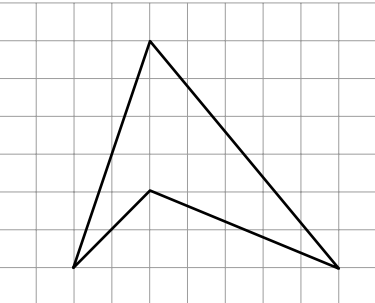
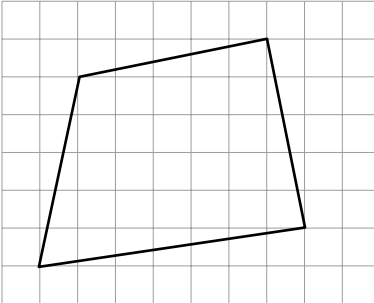
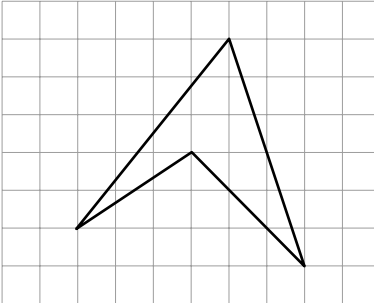
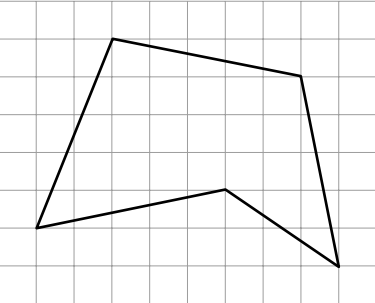
3)  Ответ: _____	4)  Ответ: _____	5)  Ответ: _____
6)  Ответ: _____	7)  Ответ: _____	8)  Ответ: _____
9)  Ответ: _____	10)  Ответ: _____	11)  Ответ: _____

12)  Ответ: _____	13)  Ответ: _____	14)  Ответ: _____
15)  Ответ: _____	16)  Ответ: _____	17)  Ответ: _____
18)  Ответ: _____	19)  Ответ: _____	20)  Ответ: _____

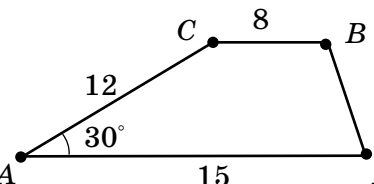
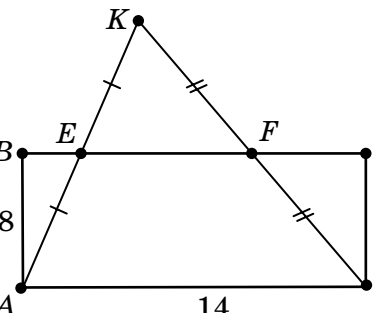
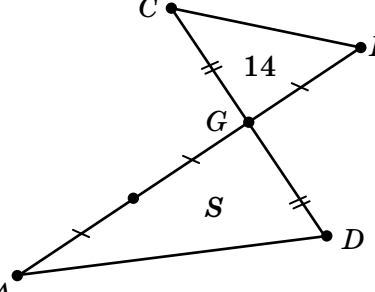
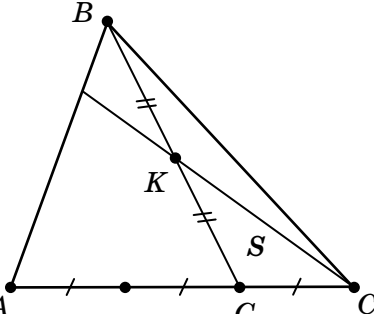
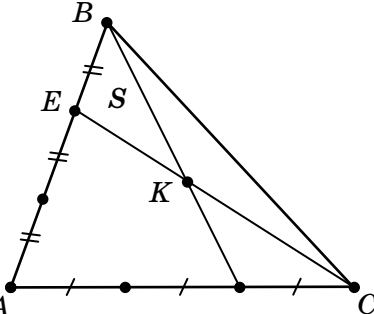
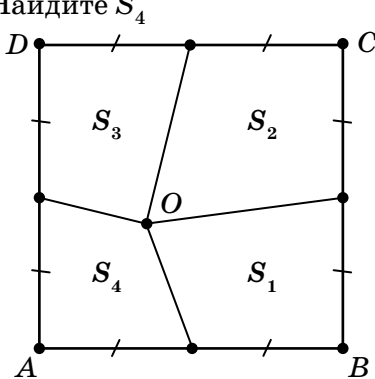
Задание 37. По данным чертежа найдите отношение $S_1 : S_2$.

1) Ответ: _____	2) Ответ: _____	3) Ответ: _____
4) Ответ: _____	5) Ответ: _____	6) Ответ: _____
7) ABCD – параллелограмм Ответ: _____	8) ABCD – параллелограмм Ответ: _____	9) ABCD – параллелограмм Ответ: _____
10) ABCD – параллелограмм Ответ: _____	11) ABCD – параллелограмм Ответ: _____	12) ABCD – параллелограмм Ответ: _____

Задание 38. Найдите площади данных фигур. Сторона клетки равна 1.

1)  Ответ: _____	2)  Ответ: _____	3)  Ответ: _____
4)  Ответ: _____	5)  Ответ: _____	6)  Ответ: _____

Задание 39. Проверьте себя. Выполните задания.

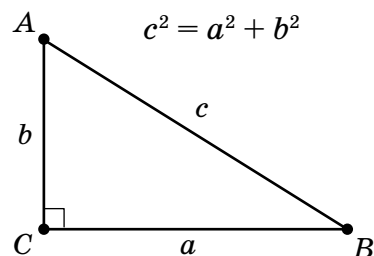
1) Найдите площадь трапеции $ABCD$  Ответ: _____	2) $ABCD$ – прямоугольник. Найдите $S_{\triangle KEF}$  Ответ: _____	3) $S_{\triangle GBC} = 12$. Найдите $S_{\triangle AGD}$  Ответ: _____
4) $S_{\triangle ABC} = 18$. Найдите $S_{\triangle GBK}$  Ответ: _____	5) $S_{\triangle ABC} = 36$. Найдите $S_{\triangle CEK}$  Ответ: _____	6) $S_1 = 24, S_2 = 27, S_3 = 18$. Найдите S_4  Ответ: _____

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



Важно знать:

- В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).
- Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то напротив большей стороны лежит угол в 90° (теорема, обратная теореме Пифагора).



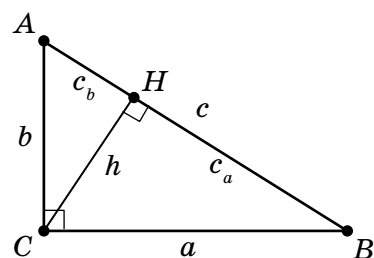
Задание 40. Дан $\triangle ABC$ – см. чертёж выше. Заполните пропуски в таблице.

	a	b	c
1)	40	30	
2)	30		34
3)		10	26
4)		21	35
5)	9		41
6)	6	6	
7)	$4\sqrt{6}$		18
8)		$6\sqrt{3}$	12



Важно знать:

- Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна произведению катетов, делённому на гипотенузу $\left(h = \frac{ab}{c}\right)$.



Задание 41. Заполните пропуски в таблице, опираясь на чертёж.

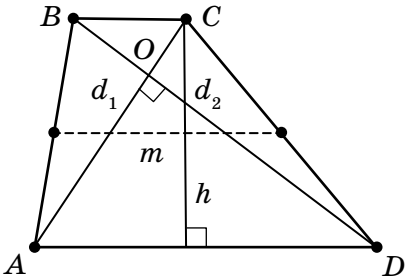
	a	b	c	h	c_a	c_b	$\angle CBA$
1)		8					30°
2)	6						30°
3)				4			30°
4)		x					30°
5)	12						60°
6)		8					60°

	a	b	c	h	c_a	c_b	$\angle CBA$
7)			24				60°
8)		x					60°
9)	10						45°
10)			8				45°
11)					8		45°
12)	x						45°
13)	20	15					—

Задание 42. Даны стороны треугольника a, b, c . Определите, является ли он прямоугольным.

		да/нет			да/нет
1)	$a = 10, b = 6, c = 8$		2)	$a = 8, b = 12, c = 10$	
3)	$a = 24, b = 10, c = 26$		4)	$a = 15, b = 20, c = 25$	
5)	$a = 10, b = 17, c = 15$		6)	$a = 12, b = 16, c = 20$	
7)	$a = 12, b = 18, c = 15$		8)	$a = 30, b = 16, c = 34$	
9)	$a = 9, b = 41, c = 40$		10)	$a = 6\sqrt{3}, b = 12, c = 6$	

Задание 43. Дана трапеция $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями. Найдите длину средней линии m , длину высоты h и площадь трапеции, если известны длины диагоналей d_1 и d_2 .

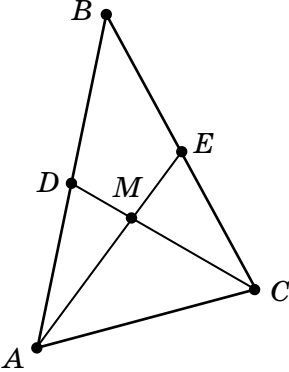
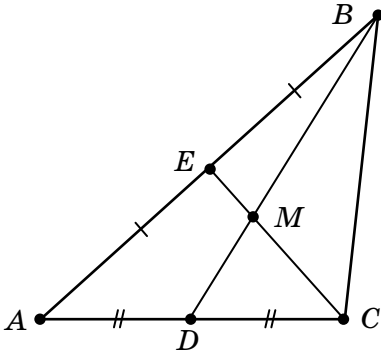
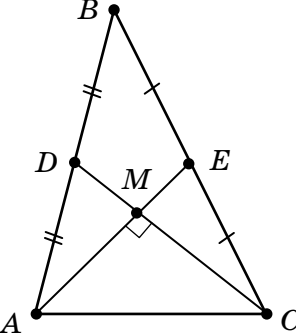
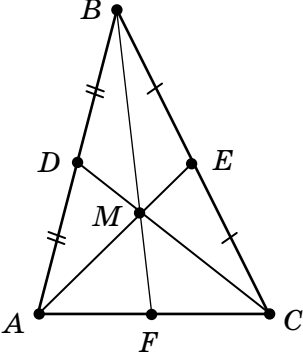


	d_1	d_2	m	h	S
1)	5	12			
2)	8	15			
3)	10	10			
4)	15	20			
5)	6	$6\sqrt{3}$			

Задание 44. Сколько существует прямоугольных треугольников со сторонами, длины которых выражаются целыми числами, если длина одного из катетов равна a ?

	$a = 25$	Решение: Обозначим гипотенузу данного треугольника c, второй катет b. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2, a^2 = (c-b)(c+b), 625 = (c-b)(c+b)$, при этом $c > b; c+b > c-b$. Поскольку b, c – натуральные числа, для $c-b$ и $c+b$ возможны варианты 1 и 625; 5 и 125. Решая соответствующие системы уравнений, получаем: $b = 312; c = 313$ или $b = 60; c = 65$. Ответ: 2.
1)	10	Ответ: _____
2)	$a = 15$	Ответ: _____
3)	$a = 20$	Ответ: _____

Задание 45. Выполните задания.

1) $AE = 12; CD = 9; AC = 10$. Найдите $S_{\triangle ABC}$  Ответ: _____	2) $CM = 12; BD = 45; AC = 34$. Найдите $S_{\triangle ABC}$  Ответ: _____
3) $AB = 6; CD = 8$. Найдите AC  Ответ: _____	4) $AE = 15; BF = 39; CD = 36$. Найдите $S_{\triangle ABC}$  Ответ: _____



Важно знать:

- Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – стороны треугольника, p – его полупериметр (**формула Герона**).
- Площадь четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ (в частности, площадь ромба и дельтоида равна половине произведения диагоналей).

Задание 46. Вычислите площадь треугольника со сторонами a, b, c .

1)	$a = 13$ $b = 14$ $c = 15$	Ответ: $S =$ _____
2)	$a = 10$ $b = 12$ $c = 10$	Ответ: $S =$ _____
3)	$a = 9$ $b = 7$ $c = 8$	Ответ: $S =$ _____
4)	$a = 16$ $b = 19$ $c = 21$	Ответ: $S =$ _____

Задание 47. Найдите площади данных фигур. Сторона клетки равна 1.

1) 	2) 	3)
Ответ: _____	Ответ: _____	Ответ: _____
4) 	5) 	6)
Ответ: _____	Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 48. Проверьте себя.

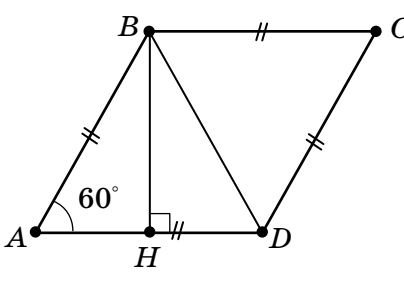
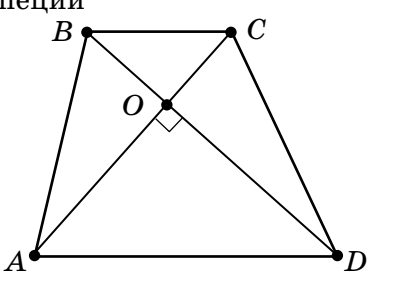
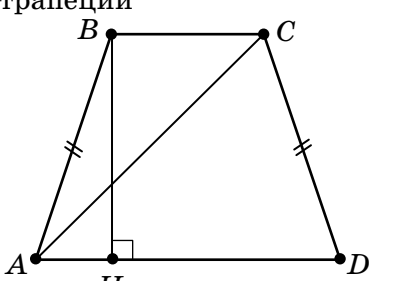
А) Отметьте галочками верные утверждения.

1) Если две стороны прямоугольного треугольника равны 6 и 8, то третья сторона равна 10.	
2) Если катеты прямоугольного треугольника равны 3, то его гипотенуза больше 5.	
3) Треугольник со сторонами 19, 180, 181 – прямоугольный.	
4) Существует прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами, один из катетов которого равен 27.	
5) Существуют по крайней мере три прямоугольных треугольник с целочисленными сторонами, один из катетов которого кратен 117.	

Б) Укажите номер правильного ответа.

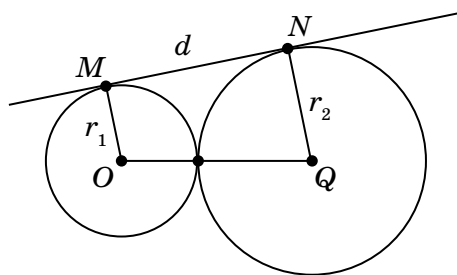
	Условие	Варианты ответов				Ваш выбор
		1	2	3	4	
1)	Найдите диагональ квадрата со стороной $6\sqrt{3}$	6	$6\sqrt{6}$	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{6}$	
2)	Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 5. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15\sqrt{34}}{34}$	$\frac{15\sqrt{7}}{14}$	
3)	Высота равностороннего треугольника равна 6. Найдите площадь этого треугольника	$12\sqrt{3}$	18	$6\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$	
4)	Сторона ромба равна 26, а одна из его диагоналей равна 20. Найдите площадь ромба	240	480	260	960	
5)	Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 8. Найдите площадь этого треугольника	$8\sqrt{2}$	16	$16\sqrt{2}$	32	
6)	Две медианы треугольника равны 12 и 22,5. Сторона треугольника, не содержащая оснований медиан, равна 17. Найдите площадь треугольника	360	120	90	180	

В) Выполните задания.

1) $BD = 2\sqrt{3}$. Найдите площадь $ABCD$  Ответ: _____	2) $ABCD$ – трапеция, $AC = 5$, $BD = 12$. Найдите длину средней линии и площадь трапеции  Ответ: _____	3) $ABCD$ – трапеция, $AC = 25$, $BH = 15$. Найдите длину средней линии и площадь трапеции  Ответ: _____
---	---	---

ПЛОЩАДЬ, ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ОКРУЖНОСТИ

Задание 49. Две окружности касаются внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная (см. чертёж). Заполните пропуски в таблице.



	r_1	r_2	d	S_{OMNQ}	Вычисления
1)	4	9			
2)	2	8			
3)	9		30		
4)		25	20		
5)	x	y			

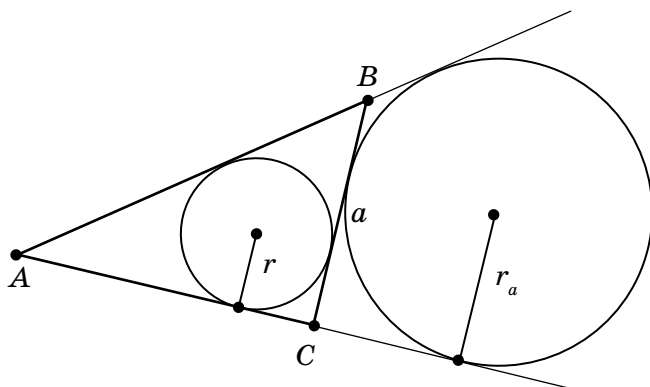


Важно знать:

• **Площадь треугольника** можно вычислить по формулам:

♦ $S = pr$, где p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности;

♦ $S = (p - a)r_a$, где p – полупериметр треугольника, r_a – радиус внеписанной окружности со стороны a .

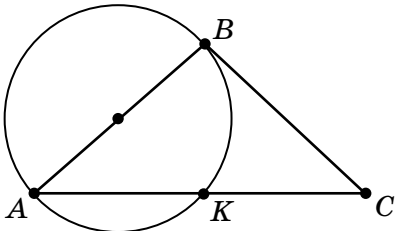
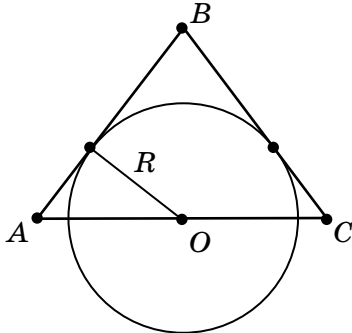
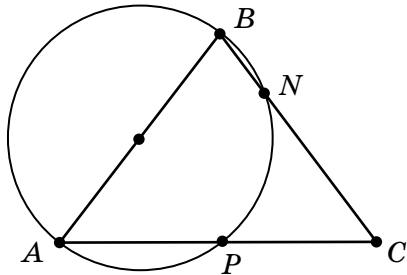


Задание 50. Даны стороны треугольника a, b, c . Заполните пропуски.

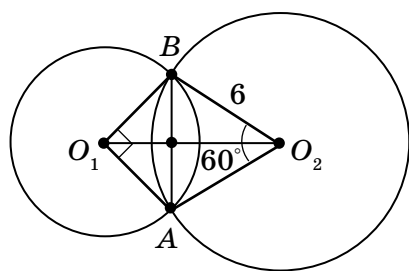
	$a; b; c$	S	r	r_a	r_b	r_c
1)	6; 8; 10					
		Ответ: _____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____

	$a; b; c$	S	r	r_a	r_b	r_c
2)	13; 14; 15	Ответ: _____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____
3)	10; 10; 12	Ответ: _____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____
4)	12; 12; 12	Ответ: _____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____
5)	8; 15; 17	Ответ: _____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____
6)	10; 17; 21	Ответ: _____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____	Ответ: ____

Задание 51. Выполните задания.

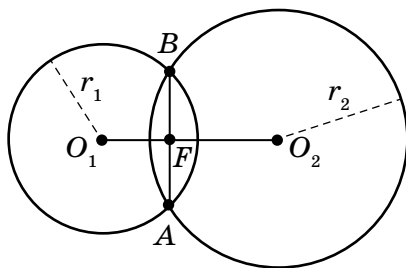
1) $AB = BC = 10, AC = 16$. Найдите BK  Ответ: _____	2) $AB = BC, BO : AC = 3 : 8$. $S_{\triangle ABC} = 25$. Найдите R  Ответ: _____	3) $AB = BC = 13$, $BN : NC = 1 : 2$. Найдите $S_{\triangle ABC}$  Ответ: _____
--	--	--

4) Найдите O_1O_2



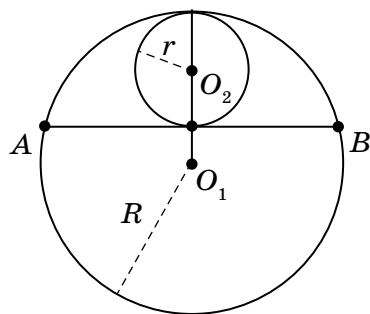
Ответ: _____

5) $r_2 = 3r_1, O_1F = 3, O_2F = 11$.
Найдите BA



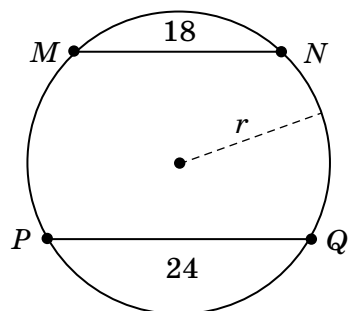
Ответ: _____

6) $r = 4, AB = 24$. Найдите R



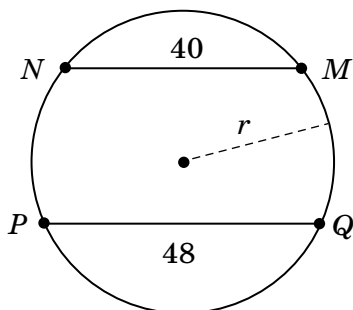
Ответ: _____

7) $r = 15, MN \parallel PQ$. Найдите
расстояние между MN и PQ



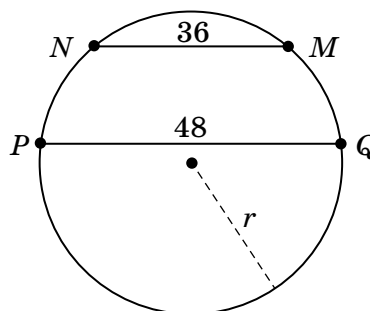
Ответ: _____

8) $MN \parallel PQ$, расстояние между MN и PQ равно 22.
Найдите r



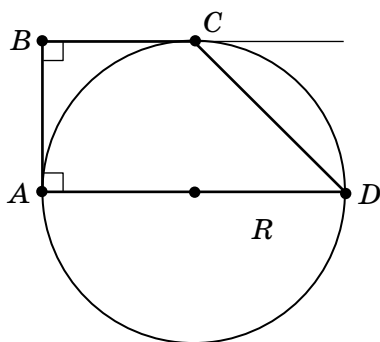
Ответ: _____

9) $r = 30, MN \parallel PQ$. Найдите
расстояние между MN и PQ



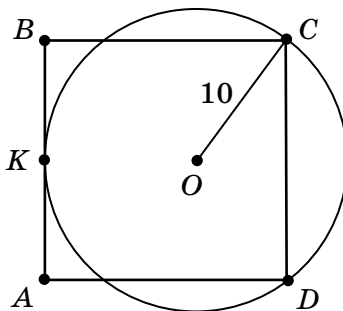
Ответ: _____

10) $R = 7$. Найдите BD и AC



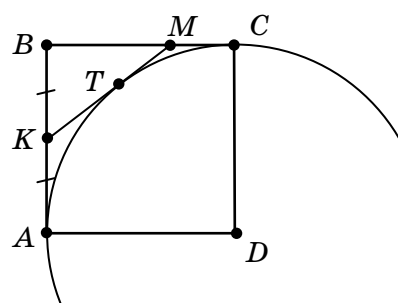
Ответ: _____

11) $ABCD$ – квадрат.
Найдите S_{ABCD}



Ответ: _____

12) $ABCD$ – квадрат, A, C –
точки касания. $BM = 6$.
Найдите MC



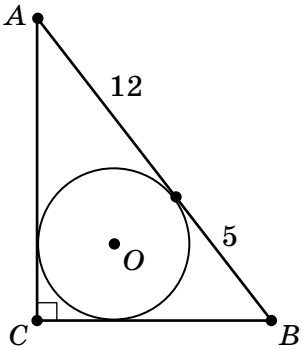
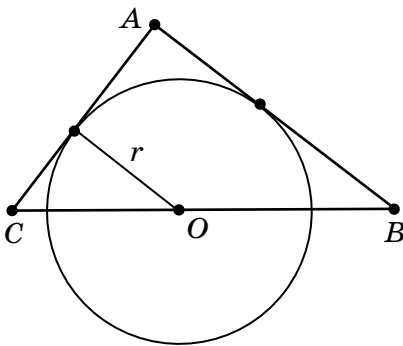
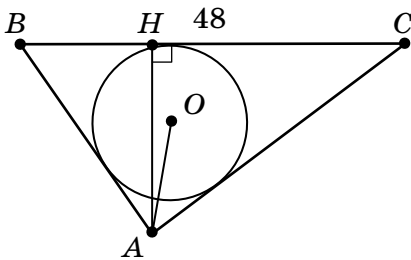
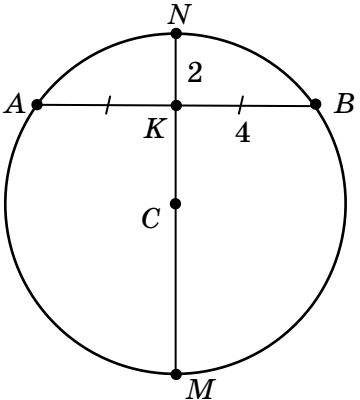
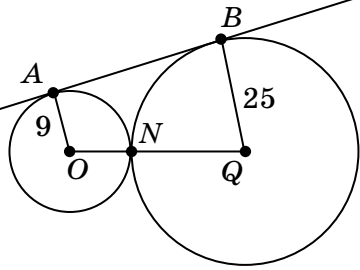
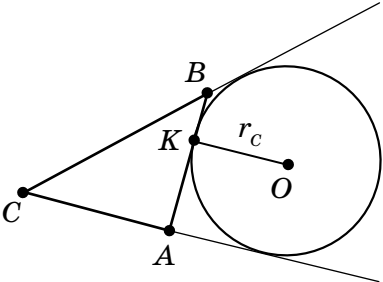
Ответ: _____

Задание 52. Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Диаметр окружности равен 10. На расстоянии 3 от центра окружности проведена хорда, перпендикулярная этому диаметру. Тогда длина этой хорды равна 8.	
2) Для того, чтобы найти площадь треугольника, необходимо знать его периметр и радиус вписанной в него окружности.	
3) Две хорды окружности с длинами 8 и 15 имеют общий конец. Радиус окружности равен 8,5. Тогда отрезок, соединяющий другие концы хорд, является диаметром окружности.	
4) Если в квадрат вписана окружность и вокруг него описана окружность, то отношение радиусов этих окружностей равно 1 : 2.	
5) Если вокруг данной окружности описаны всевозможные треугольники, то отношение их площадей равно отношению их периметров.	

Б) Выполните задания.

1) Найдите AC и BC  Ответ: _____	2) $AC = 10, AB = 24, BC = 26$. Найдите r  Ответ: _____	3) $AH = 8,5; BC = 48; r = 4$. Найдите AO  Ответ: _____
4) Найдите радиус окружности  Ответ: _____	5) Найдите площадь $ABQO$  Ответ: _____	6) $S_{\triangle ABC} = 48$, радиус вписанной в $\triangle ABC$ окружности равен 3, $AB = 12$. Найдите r_C  Ответ: _____

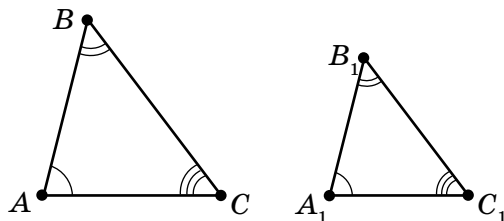
ПОДОБИЕ. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ



Важно знать:

- Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.
- Отношение сходственных сторон называется **коэффициентом подобия** треугольников.
- Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны (первый признак подобия треугольников).



$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

Задание 53. Укажите треугольник с вершинами в отмеченных точках, подобный данному, и запишите отношение сходственных сторон.

	данный треугольник	отношение сходственных сторон
	$\triangle ABC$ Ответ: $\triangle ABC \sim \triangle EBD$	$\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BE}$
1)	$\triangle ABC$ Ответ: _____	
2)	$\triangle AMN$ Ответ: _____	
3)	$\triangle PBN$ Ответ: _____	
4)	$\triangle PDN$ Ответ: _____	



Важно знать:

- Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то эти треугольники подобны (второй признак подобия треугольников).
- Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны (третий признак подобия треугольников).
- Длины и линейные размеры сходственных элементов подобных треугольников относятся как коэффициент подобия; площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия:

$$\frac{p}{p_1} = k; \frac{h_a}{h_{a_1}} = k; \frac{m_a}{m_{a_1}} = k; \frac{r}{r_1} = k; \frac{R}{R_1} = k; \frac{S}{S_1} = k^2 \text{ и т.д.}$$

Задание 54. Найдите указанное отношение по данным чертежа.

1) $P_{\triangle ABC} : P_{\triangle ACD}$ Ответ: _____	2) $MQ : QP$ Ответ: _____	3) $S_{\triangle EOF} : S_{\triangle DOG}$ Ответ: _____
4) $BH : BK$ Ответ: _____	5) $BP : CQ$ Ответ: _____	6) $NP : LH$ Ответ: _____
7) $S_{\triangle BKN} : S_{\triangle BND}$ Ответ: _____	8) $S_{\triangle FEK} : S_{\triangle DNE}$ Ответ: _____	9) $P_{\triangle BOC} : P_{\triangle AOD}$ Ответ: _____

Задание 55. Найдите x .

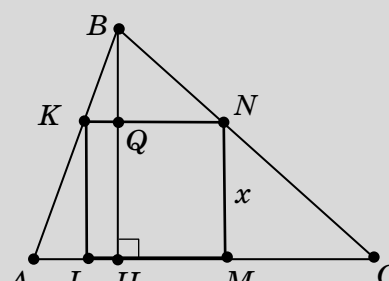
Пример: $KLMN$ – квадрат, $AC = 16$, $BH = 12$

Краткое решение: $\triangle KBN \sim \triangle ABC$ (по первому признаку), причём, если k – коэффициент подобия, то

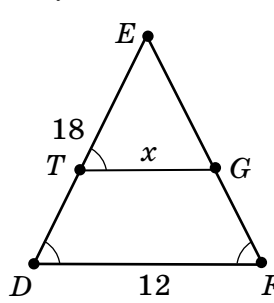
$$k = \frac{KN}{AC} = \frac{x}{16}.$$

Тогда отношение высот BQ и BH равно k , то есть $\frac{x}{16} = \frac{12-x}{12}$, откуда получаем $\frac{48}{7}$.

Ответ: $x = \frac{48}{7}$.

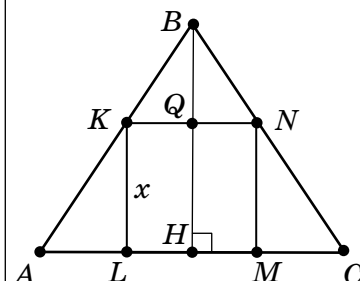


1) $P_{QTGF} = 40$



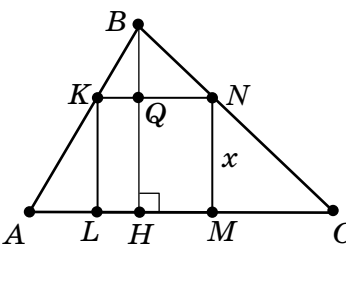
Ответ: _____

2) $KLMN$ – квадрат, $AB = BC = 10$, $AC = 12$



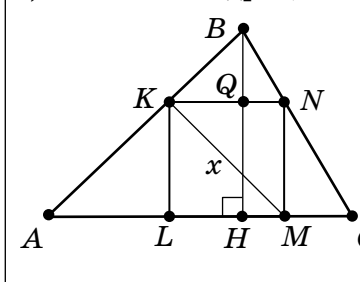
Ответ: _____

3) $KLMN$ – квадрат, $AC = 12$, $BQ = 12$



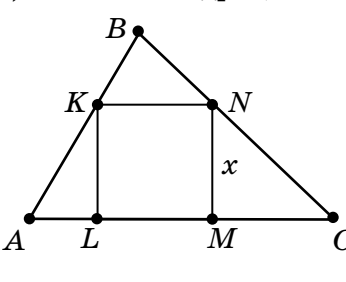
Ответ: _____

4) $KLMN$ – квадрат, $BH = 8$, $AC = 24$



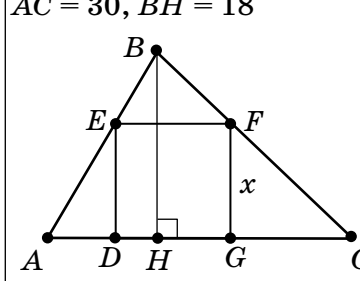
Ответ: _____

5) $KLMN$ – квадрат, $AB = 13$, $BC = 15$, $AC = 14$



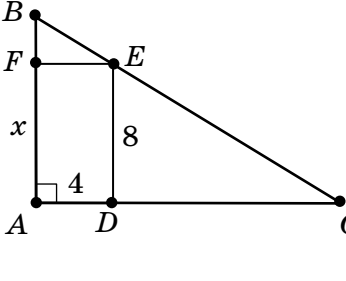
Ответ: _____

6) $DEFG$ – прямоугольник, $DE : EF = 3 : 5$, $AC = 30$, $BH = 18$



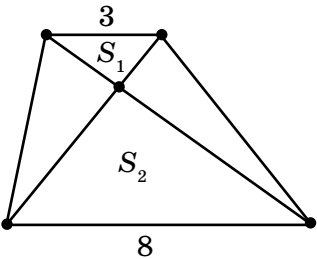
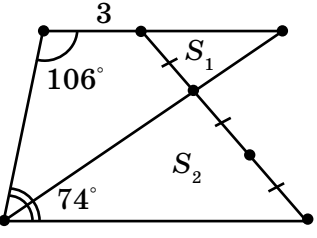
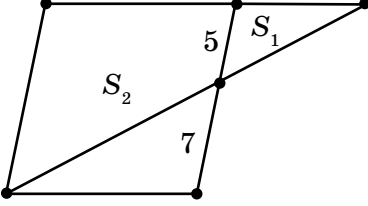
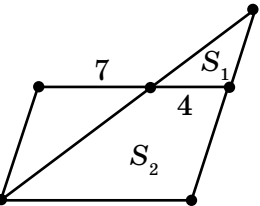
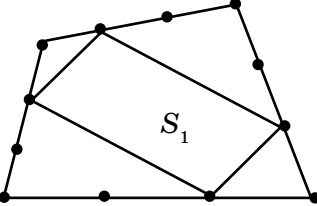
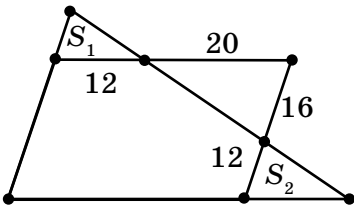
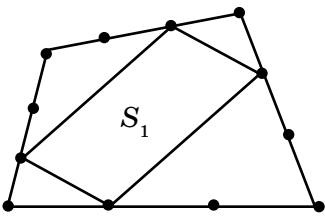
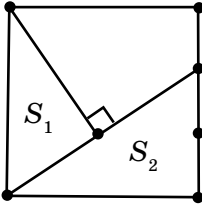
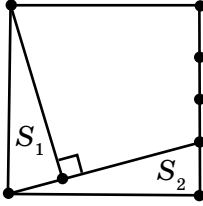
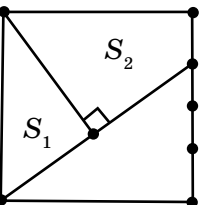
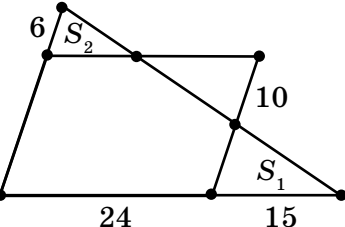
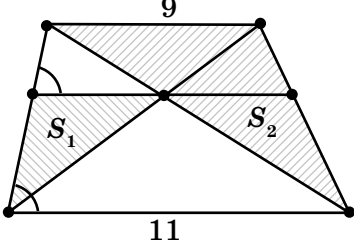
Ответ: _____

7) $AFED$ – прямоугольник, $S_{\triangle ABC} = 100$



Ответ: _____

Задание 56. По данным чертежа найдите отношение $S_1 : S_2$.

1) Дана трапеция  Ответ: _____	2)  Ответ: _____	3) Дан параллелограмм  Ответ: _____
4) Дан параллелограмм  Ответ: _____	5) Стороны разделены точками на равные части; S_2 – площадь всего четырёхугольника  Ответ: _____	6) Дан параллелограмм  Ответ: _____
7) Стороны разделены точками на равные части; S_2 – площадь всего четырёхугольника  Ответ: _____	8) Дан квадрат, сторона поделена на равные части  Ответ: _____	9) Дан квадрат, сторона поделена на равные части  Ответ: _____
10) Дан квадрат, сторона поделена на равные части  Ответ: _____	11) Дан параллелограмм  Ответ: _____	12) Дана трапеция  Ответ: _____



Важно знать:

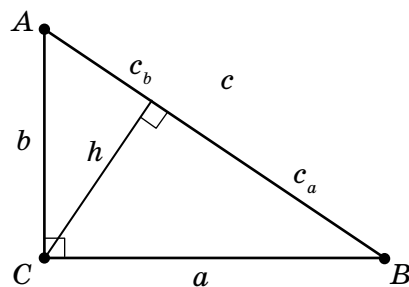
- Для элементов прямоугольного треугольника (см. чертёж) выполнено:

♦ $\triangle ABC, \triangle ACH$ и $\triangle CBH$ – подобны

♦ $h = \sqrt{c_a \cdot c_b}$; $h = \frac{ab}{c}$

♦ $a = \sqrt{c \cdot c_a}$; $b = \sqrt{c \cdot c_b}$

♦ $c_a : c_b = a^2 : b^2$



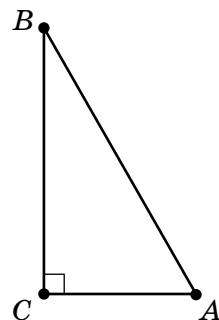
Задание 57. Заполните пропуски в таблице, опираясь на чертёж, приведённый выше.

	a	b	c	h	c_a	c_b
1)	6	8				
2)					4	9
3)			15		12	
4)	30				18	
5)		$\sqrt{84}$		100		
6)	$4\sqrt{3}$		12			
7)				20		40
8)		$9\sqrt{13}$		18		



Важно знать:

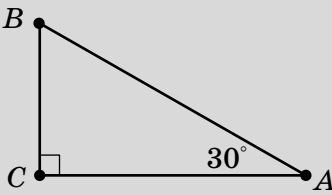
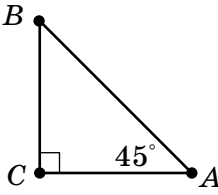
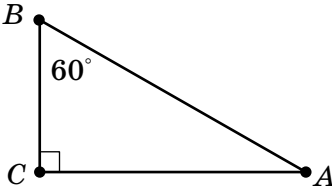
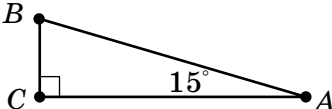
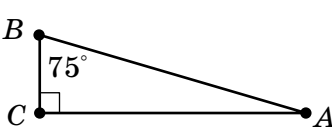
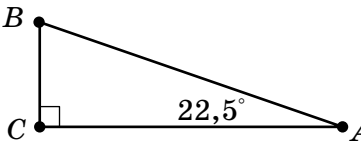
- Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, противолежащего данному углу, к гипотенузе.
- Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, прилежащего данному углу, к гипотенузе.
- Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, противолежащего данному углу, к катету, прилежащему данному углу.
- Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, прилежащего данному углу, к катету, противолежащему данному углу.



В $\triangle ABC$ (угол C – прямой) $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$,

при этом $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

Задание 58. Заполните таблицу .

		$\sin A$	$\cos A$	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{ctg} A$
		Обозначим $BC = x$. Тогда $AB = 2x$, $AC = x\sqrt{2}$. По определению тригонометрических функций получаем ответ:			
		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
1)					
2)					
3)					
4)					
5)					

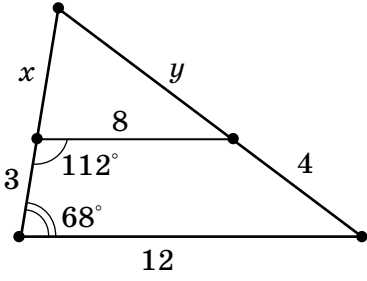
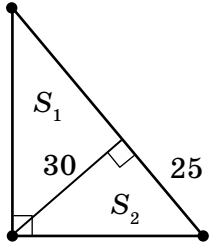
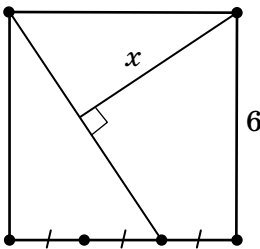
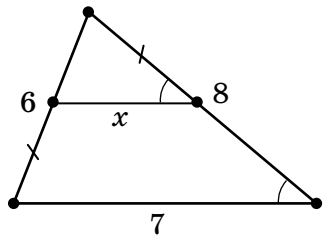
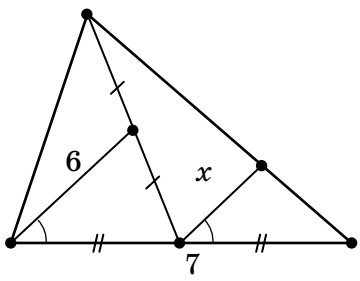
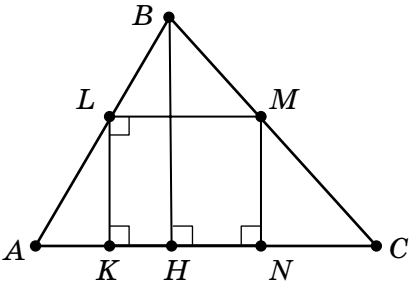
Задание 59. Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Если три угла одного треугольника равны трём углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.	
2) Любые два равнобедренных треугольника, имеющие угол 40° , подобны.	
3) Если треугольники равны, то они подобны.	
4) Для того, чтобы высота треугольника делила его на два подобных треугольника, достаточно, чтобы исходный треугольник был прямоугольным.	
5) Любые два равнобедренных треугольника, имеющие угол 105° , подобны.	
6) На данном отрезке как на стороне можно построить хотя бы один треугольник, подобный данному треугольнику.	

7) Любые два равносторонних треугольника подобны.	
8) Диагонали любой трапеции образуют два подобных треугольника.	
9) Если два треугольника прямоугольные, то они подобны.	
10) Если периметры треугольников относятся как 1 : 2, то треугольники подобны с коэффициентом подобия 0,5.	
11) Меньшая диагональ прямоугольной трапеции делит её на два подобных треугольника.	
12) Средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, подобный исходному.	
13) Синус острого угла прямоугольного треугольника может принимать значение 2.	

Б) Выполните задания.

1) Найдите x и y  Ответ: _____	2) Найдите $S_1 : S_2$  Ответ: _____
3) Дан квадрат. Найдите x  Ответ: _____	4) Найдите x  Ответ: _____
5) Найдите x  Ответ: _____	6) $KL : LM = 5 : 7, AC = 27, BH = 12$. Найдите P_{KLMN}  Ответ: _____

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ



Важно знать:

- Семейство параллельных прямых отсекает на сторонах данного угла пропорциональные отрезки

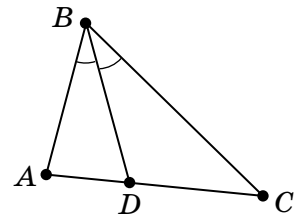
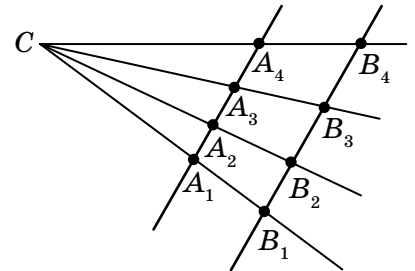
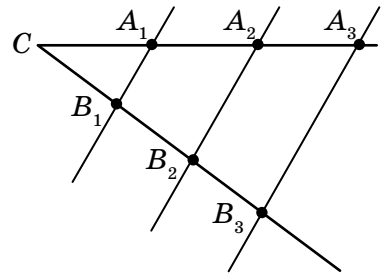
$$\frac{CA_1}{CB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots$$

- Семейство прямых, проходящих через одну точку, отсекает на параллельных прямых пропорциональные отрезки

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \dots$$

Важно помнить: отрезки, на которые биссектриса треугольника делит сторону, пропорциональны двум другим сторонам

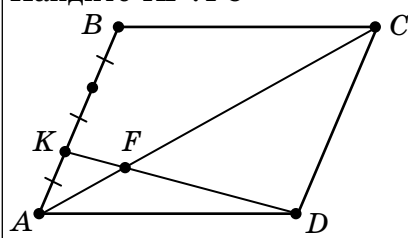
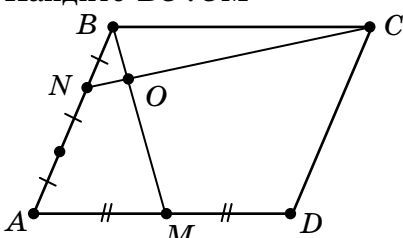
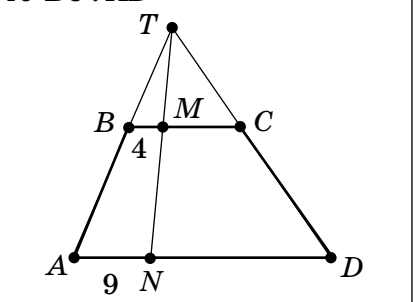
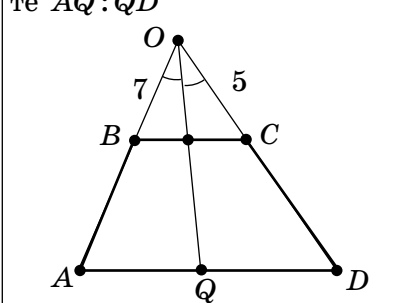
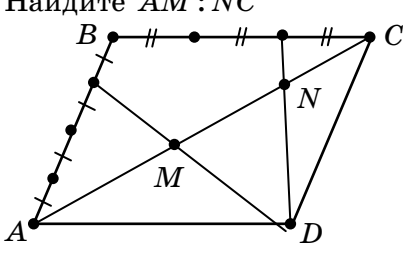
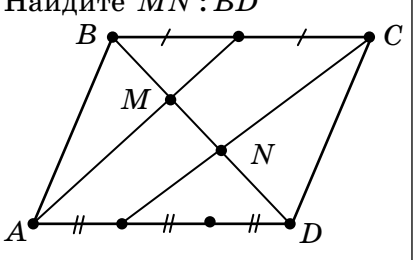
треугольника $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.



Задание 60. Заполните пропуски в таблице по данным рисунка.

		a	b	x	y
1		7	16		4
2		8		4	6
3			$6\sqrt{3}$	2	3
4		8	6	6	
5			$\frac{16}{3}$	2	3
6		$6\sqrt{3}$		$5\sqrt{3}$	6
7		6	9	2	
8		$9\sqrt{3}$		$3\sqrt{6}$	$5\sqrt{6}$
9		8	12		3

Задание 61. Выполните задания.

1) $ABCD$ – параллелограмм. Найдите $AF : FC$ 	2) $ABCD$ – параллелограмм. Найдите $BO : OM$ 	3) $ABCD$ – трапеция. Найдите $BC : AD$ 
Ответ: _____	Ответ: _____	Ответ: _____
4) $ABCD$ – трапеция. Найдите $AQ : QD$ 	5) $ABCD$ – параллелограмм. Найдите $AM : NC$ 	6) $ABCD$ – параллелограмм. Найдите $MN : BD$ 
Ответ: _____	Ответ: _____	Ответ: _____



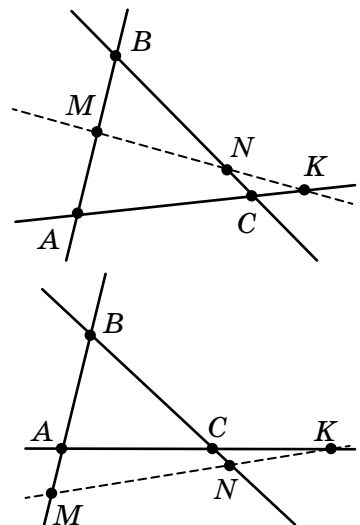
Важно знать:

- Если прямые, содержащие стороны треугольника пересечены секущей (см. чертёж), то справедливо равенство

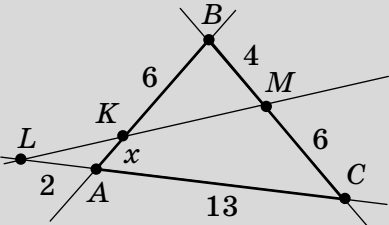
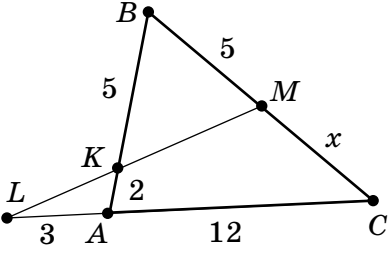
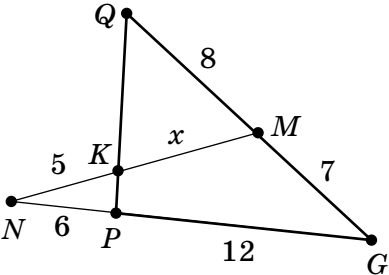
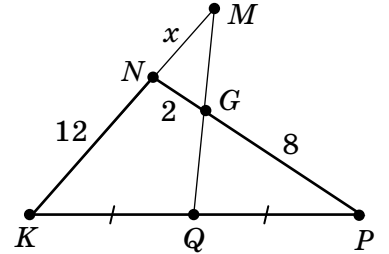
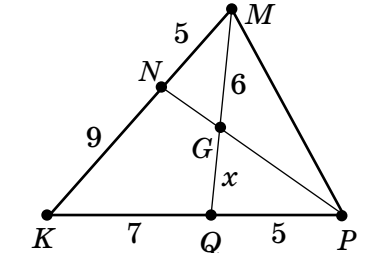
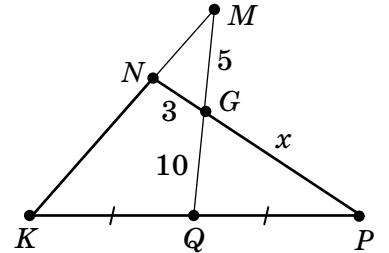
$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$$

(теорема Менеля).

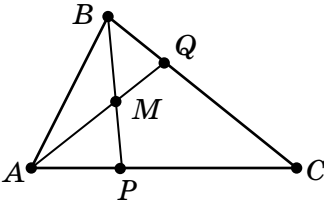
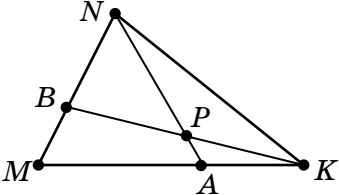
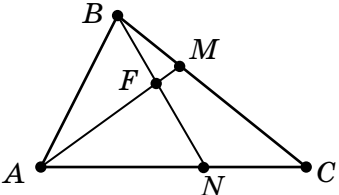
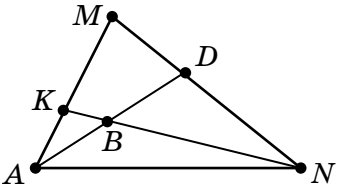
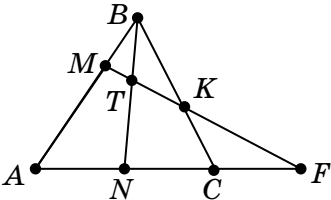
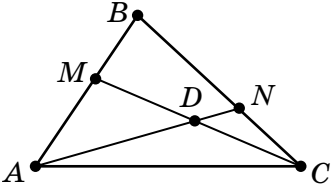
При этом возможны только два варианта: секущая пересекает две стороны и одно продолжение стороны, или же секущая пересекает три продолжения сторон.

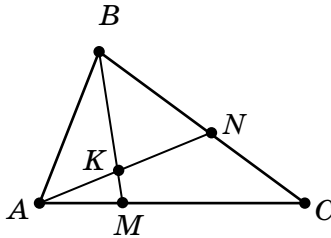
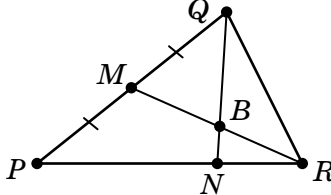
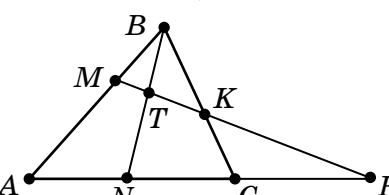
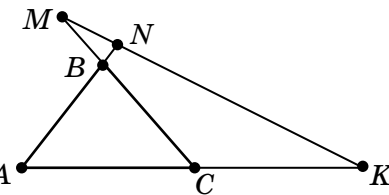
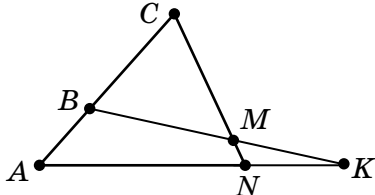
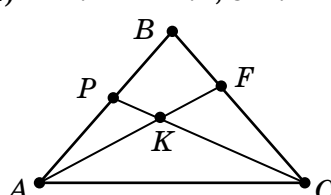


Задание 62. Заполните таблицу, применив теорему Менелая.

	Чертёж	Треуголь- ник	Секущая	Соотношение	Искомая величина x
п р и м е р		$\triangle ABC$	MK	$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CL}{LA} = 1,$ $\frac{x}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{15}{2} = 1$	$x = \frac{6}{5}$
1)					
2)					
3)					
4)					
5)					

Задание 63. Найдите отношение указанных отрезков.

1) $AP : PC = 2 : 5, BQ : QC = 1 : 2$ 	$BM : MP$ Ответ: _____	$AM : MQ$ Ответ: _____
2) $MB : BN = 1 : 2, MA : AK = 3 : 1$ 	$AP : PN$ Ответ: _____	$BP : PK$ Ответ: _____
3) $AN : NC = 9 : 5, BF : FN = 4 : 7$ 	$BM : MC$ Ответ: _____	$AF : FM$ Ответ: _____
4) $AB : BD = 1 : 2, MD : DN = 3 : 7$ 	$AK : KM$ Ответ: _____	$KB : BN$ Ответ: _____
5) $AM : MB = 2 : 1, AN = NC,$ $BK : KC = 3 : 2$ 	$CF : AC$ Ответ: _____	$BT : TN$ Ответ: _____
6) $AM : MB = 3 : 2, BN : NC = 5 : 3$ 	$AD : DN$ Ответ: _____	$CD : DM$ Ответ: _____

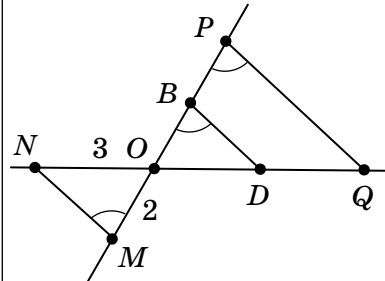
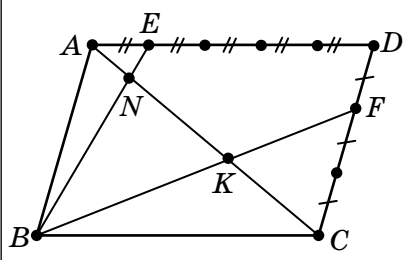
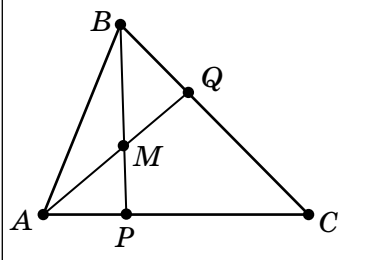
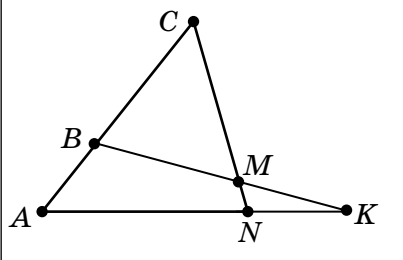
7) $AK : KN = 1 : 3, BN : NC = 4 : 3$ 	$AM : MC$	$BK : KM$
8) $BQ : BN = 5 : 2$ 	$PN : NR$	$MB : BR$
9) $AM : MB = 5 : 2,$ $AN : NC = 1 : 2, BK : KC = 3 : 1$ 	$FC : AC$	$BT : TN$
10) $AB : BN = 8 : 1, BC : BM = 7 : 2$ 	$AC : CK$	$MN : NK$
11) $BA : BC = 4 : 7, MC : MN = 9 : 2$ 	$BM : MK$	$AN : NK$
12) $AK : KF = 2 : 1, CK : KP = 3 : 1$ 	$AP : PB$	$BF : FC$

Задание 64. Проверьте себя.

А) Отметьте галочкой верные утверждения.

1) Если отрезки AB и BC пропорциональны отрезкам MN и NK , то треугольники ABC и MNK – подобны.	
2) Если отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам MN и KL , то отрезки AB и MN пропорциональны отрезкам CD и KL .	
3) Если три прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки, то эти прямые параллельны.	
4) Для того, чтобы луч был биссектрисой угла треугольника, достаточно, чтобы он делил сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.	
5) Для того, чтобы семейство прямых высекало на двух данных параллельных прямых пропорциональные отрезки, необходимо, чтобы все эти прямые проходили через одну точку.	
6) Для того, чтобы семейство прямых высекало на двух данных параллельных прямых пропорциональные отрезки, достаточно, чтобы все эти прямые проходили через одну точку.	
7) Для того, чтобы луч был биссектрисой угла треугольника, необходимо, чтобы он делил сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.	

Б) Выполните задания.

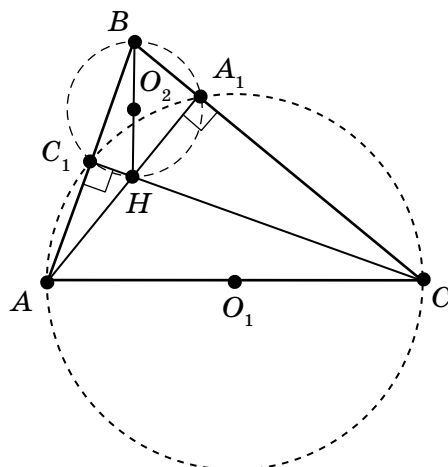
1) Найдите $OQ : QP$ и $BP : DQ$  Ответ: _____	2) Стороны параллелограмма поделены на равные отрезки (см. чертёж). Найдите $NK : AC$  Ответ: _____
3) $AP : PC = 2 : 5$, $BQ : QC = 4 : 7$. Найдите $AM : MQ$ и $BM : MP$  Ответ: _____	4) $AN : NK = 15 : 4$, $CM : MN = 5 : 1$. Найдите $BM : MK$  Ответ: _____

ПОДОБИЕ И ОКРУЖНОСТИ



Важно знать:

- Если в треугольнике ABC проведены две высоты AA_1 и BB_1 , пересекающиеся в точке H , то точки H, C_1, A_1, B лежат на одной окружности, и точки A, C, A_1, C_1 так же лежат на одной окружности, причём центры этих окружностей – середины BH и AC соответственно (см. чертёж).



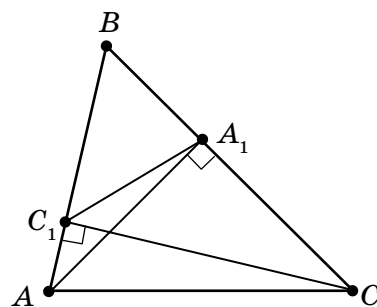
Задание 65. Дан треугольник ABC , проведены две высоты (см. чертёж). Верно ли, что указанные треугольники подобны?

Чертёж	Два треугольника	Подобны? (да/нет)
	1) $\triangle ABA_1$ и $\triangle CBC_1$	
	2) $\triangle ABA_1$ и $\triangle AHC_1$	
	3) $\triangle AC_1A_1$ и $\triangle HA_1C$	
	4) $\triangle AHC$ и $\triangle C_1HA_1$	
	5) $\triangle C_1HB$ и $\triangle A_1HB$	
	6) $\triangle AC_1A_1$ и $\triangle CC_1A_1$	
	7) $\triangle ABA_1$ и $\triangle CHA_1$	
	8) $\triangle AHC$ и $\triangle C_1A_1C$	
	9) $\triangle C_1BA_1$ и $\triangle ABC$	
	10) $\triangle C_1KH$ и $\triangle BKA_1$	
	11) $\triangle ABA_1$ и $\triangle CBC_1$	
	12) $\triangle AHC$ и $\triangle C_1HA_1$	
	13) $\triangle ABA_1$ и $\triangle AHC_1$	
	14) $\triangle C_1KH$ и $\triangle BKA_1$	
	15) $\triangle C_1HK$ и $\triangle BA_1K$	
	16) $\triangle AC_1A_1$ и $\triangle CC_1A_1$	
	17) $\triangle AC_1A_1$ и $\triangle HA_1C$	
	18) $\triangle AHC$ и $\triangle C_1A_1C$	
	19) $\triangle C_1KH$ и $\triangle BKA_1$	
	20) $\triangle ABA_1$ и $\triangle CHA_1$	



Важно знать:

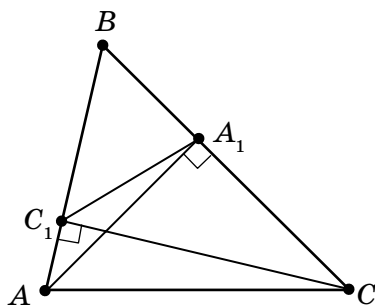
- Если в остроугольном $\triangle ABC$ проведены высоты (см. чертёж), то $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$, причём коэффициент подобия равен $\cos B$.



Задание 66. Выполните задания.

1) $\angle B = 60^\circ$, $AC = 8$.

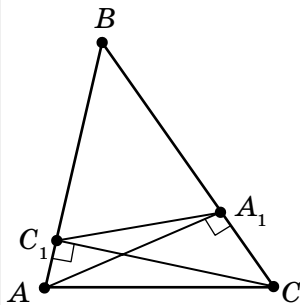
Найдите A_1C_1



Ответ: _____

2) $\angle B = 30^\circ$, $A_1C_1 = 6$.

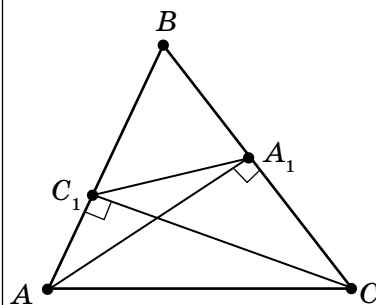
Найдите AC



Ответ: _____

3) $\angle B = 45^\circ$, $AC = 12$.

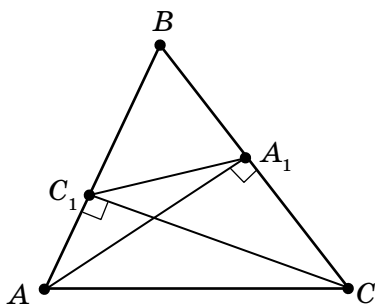
Найдите A_1C_1



Ответ: _____

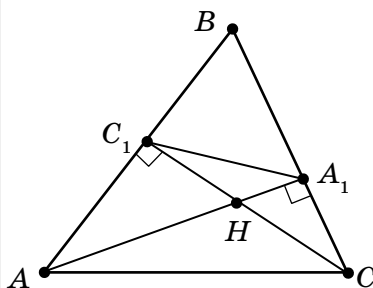
4) $A_1C_1 = 12$, $AC = 12\sqrt{2}$.

Найдите $\angle B$



Ответ: _____

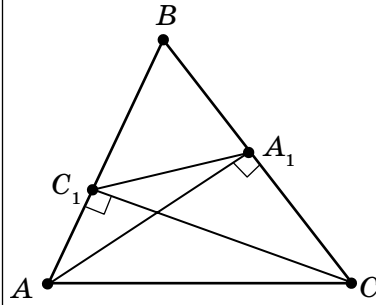
5) $\angle B = 60^\circ$, $BH = 24$. Найдите радиус описанной окружности $\triangle ABC$



Ответ: _____

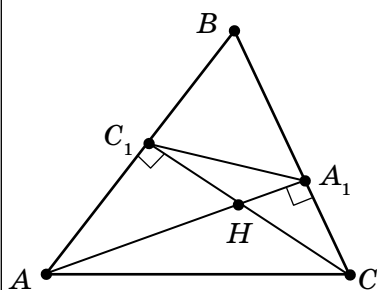
6) $AC_1 = 4$, $A_1C = 20$, $BC_1 = 3$.

Найдите $\angle C$



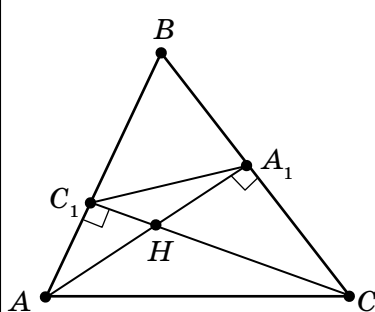
Ответ: _____

7) $AH = 25$, $HC_1 = 15$,
 $A_1C_1 = 16$. Найдите AC



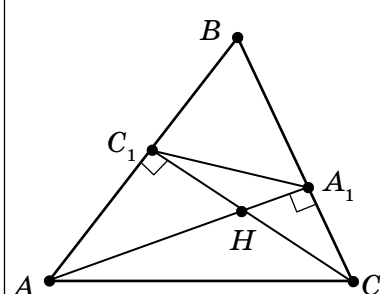
Ответ: _____

8) $AH = 5$, $AC_1 = \sqrt{21}$,
 $CH = 12$. Найдите AA_1



Ответ: _____

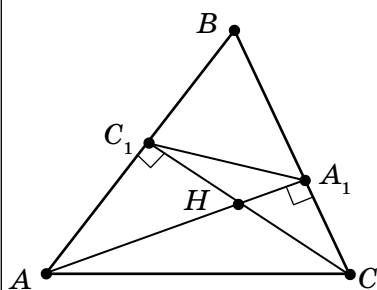
9) $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle C_1BA_1}} = 9$. Найдите $\cos B$



Ответ: _____

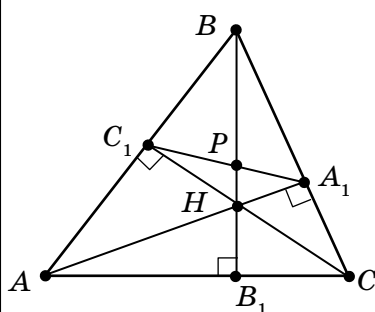
10) $\frac{S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle C_1HA_1}} = 16$, $AC = 12$.

Найдите A_1C_1



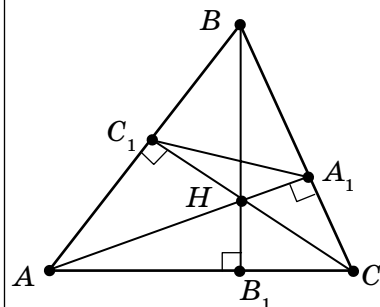
Ответ: _____

11) $BC_1 = 8$, $HP = 2$, $PA_1 = 3$,
 $HA_1 = 4$. Найдите BP



Ответ: _____

12) $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$,
 $BH = 8$. Найдите CH



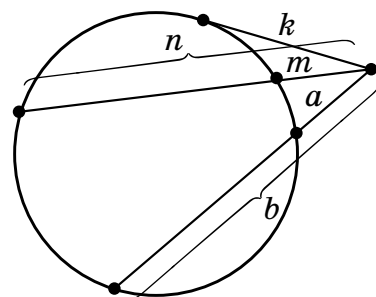
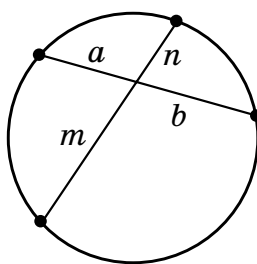
Ответ: _____



Важно знать:

- Если через точку провести две прямые, пересекающие окружность, то произведения отрезков этих прямых от исходной точки до точек пересечения с окружностью равны:

$$a \cdot b = m \cdot n.$$



- Верно и обратное утверждение: если справедливо равенство $a \cdot b = m \cdot n$ (см чертёж выше), то соответствующие четыре точки лежат на одной окружности.
- Если к окружности из одной точки проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей: $k^2 = m \cdot n$ (теорема о касательной и секущей).

Задание 67. Заполните пропуски в таблице.

		x	y	p	q
	1)	3		4	6
	2)		4	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$
	3)	$3\sqrt{3}$	6		9
	4)	5		4	6
	5)	4	8		2
	6)	6		7	8
	7)	8	7		14
		k		x	y
	8)			4	5
	9)			1	24
	10)	12		3	
	11)	12			18

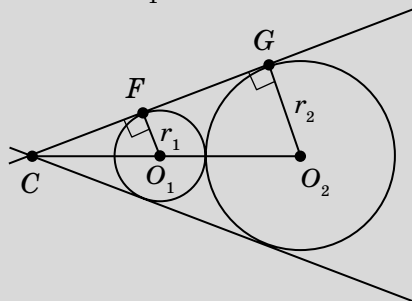
Задание 68. Определите, какие четвёрки точек лежат на одной окружности.

		Точки	Место для вычислений	да/нет
	1)	B, M, C, N		
	2)	C, D, L, N		
	3)	B, M, L, D		
	4)	K, A, N, B		
	5)	A, L, N, B		
	6)	N, C, K, D		
	7)	B, D, K, M		
	8)	M, A, D, L		

Задание 69. Используя подобие треугольников, выполните задания.

Пример: $r_1 = 4, r_2 = 9$.

Найдите CO_1



Решение:

Радиусы, проведённые в точки касания, перпендикулярны касательным. Значит, треугольники CO_1F и CO_2G подобны по двум углам (прямоуго и общему),

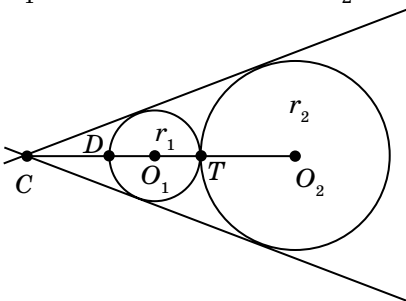
поэтому $\frac{CO_1}{FO_1} = \frac{CO_2}{GO_2}$.

Обозначим $CO_1 = x$, тогда $\frac{x}{4} = \frac{x+4+9}{9}$.

Решая это уравнение, получаем $x = 10,4$.

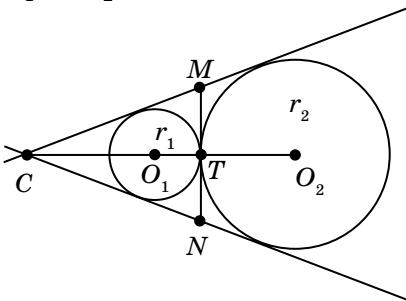
Ответ: 10,4.

1) $r_1 = 6, CD = 2$. Найдите r_2



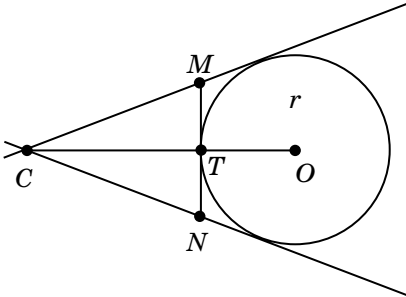
Ответ: _____

2) $r_1 = 4, r_2 = 9$. Найдите MN



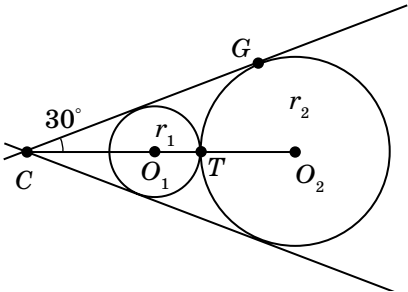
Ответ: _____

3) $r = 15, CO = 39$. Найдите MN



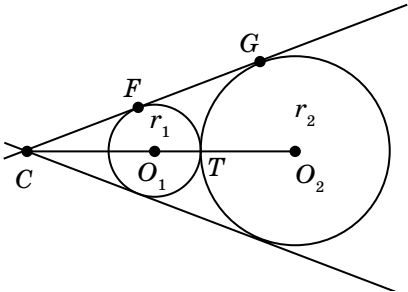
Ответ: _____

4) $r_1 = 4, r_2 = 15$. Найдите CG



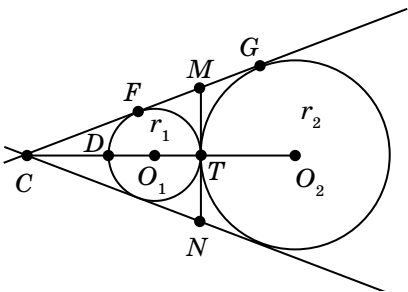
Ответ: _____

5) $FG = 12, O_1O_2 = 13$. Найдите CF



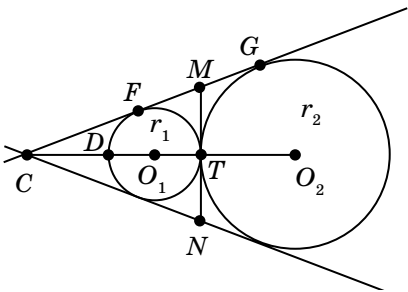
Ответ: _____

6) $MN = 30, r_2 = 25$. Найдите r_1



Ответ: _____

7) $MN = 30, r_2 = 25$. Найдите CD



Ответ: _____

Задание 70. В треугольник вписана окружность. Найдите радиус r_0 окружности, которая касается вписанной окружности и двух сторон треугольника.

Пример:

Решение:

Радиусы, проведённые в точки касания, перпендикулярны касательным. Значит, треугольники HOA и KQA подобны по двум углам (прямоуго и общему), поэтому $\frac{OH}{OA} = \frac{KQ}{AQ}$, $KQ = r_0$. По теореме Пифагора для $\triangle ABC$ $AC = 8$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$. Используя формулу $S = pr$, получаем

$r = OH = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2 = CH$. Тогда по теореме Пифагора для $\triangle HOA$ $OA = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$. В итоге имеем $\frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{r_0}{2\sqrt{10} - 2 - r_0}$. Решая это уравнение, получаем $r_0 = \frac{22 - 4\sqrt{10}}{9}$.

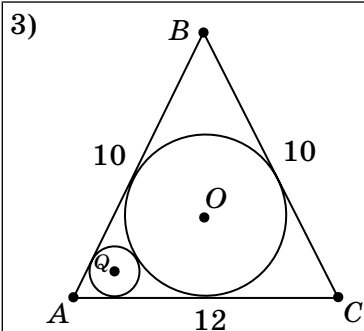
Ответ: $r_0 = \frac{22 - 4\sqrt{10}}{9}$.

1)

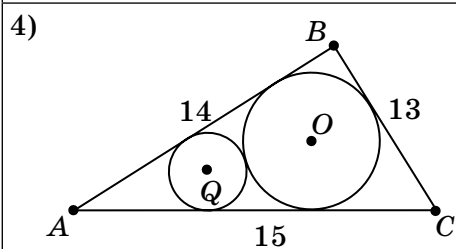
Ответ: _____

2)

Ответ: _____



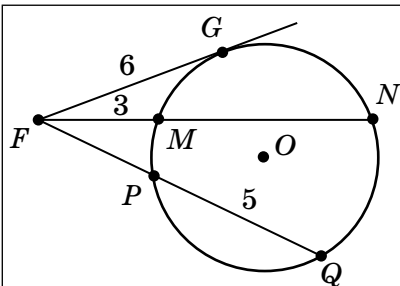
Ответ: _____



Ответ: _____

Задание 71. Проверьте себя.

А) Найдите длины указанных отрезков по данным чертежа.



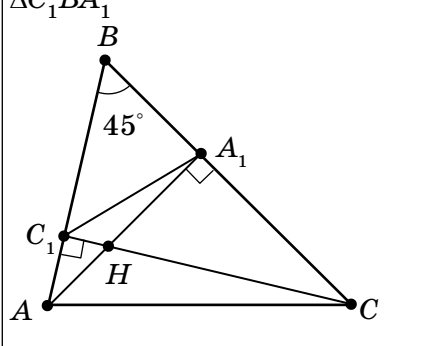
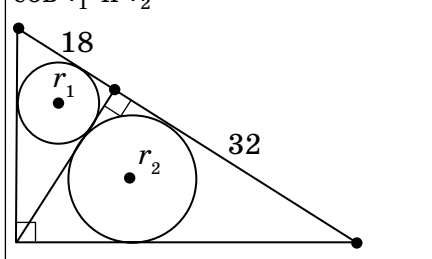
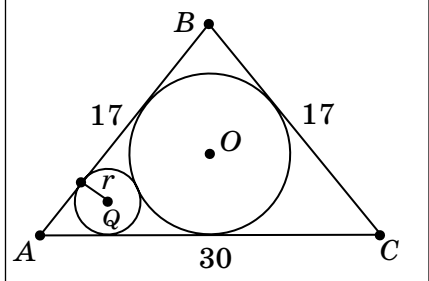
FN

FP

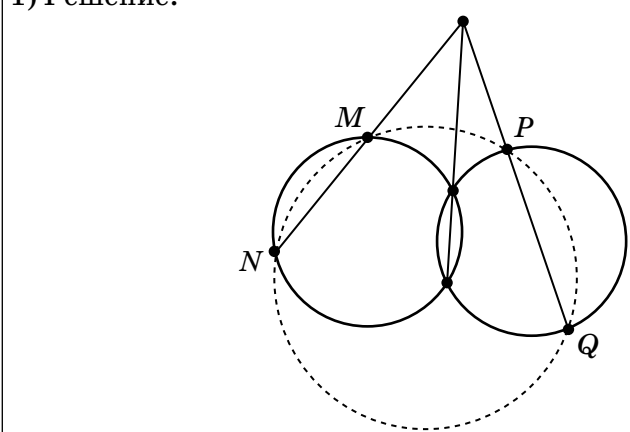
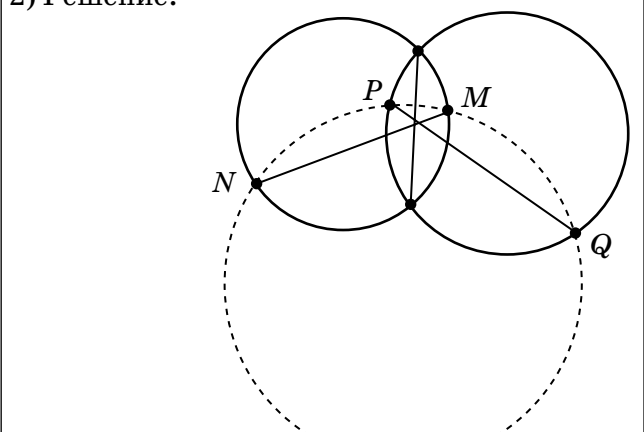
Ответ: _____

Ответ: _____

Б) Выполните задания.

1) Радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен $2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около $\triangle C_1BA_1$  Ответ: _____	2) Найти отношение радиусов r_1 и r_2  Ответ: _____	3) Найдите r  Ответ: _____
---	--	---

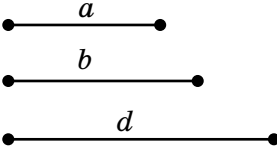
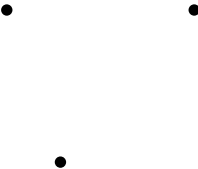
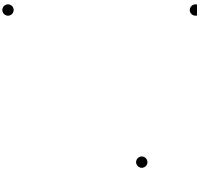
В) Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.

1) Решение: 	2) Решение: 
--	--

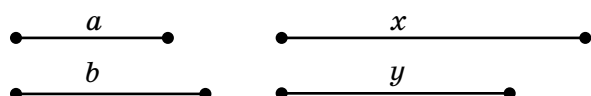
ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

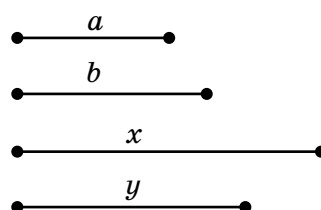
Задание 72. Выполните задания.

1) Дан отрезок. Постройте квадрат, диагональ которого равна данному отрезку. 	2) Даны отрезки a, b, d. Постройте параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = a$, $AD = b$, $AC = d$. 
3) Восстановите треугольник, если известно, что данные точки – середины его сторон. 	4) Восстановите параллелограмм, если известно, что данные точки – его вершины. 

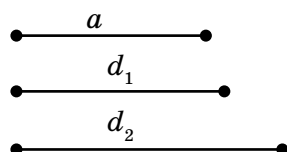
5) Постройте трапецию, основания которой равны отрезкам x и y , а боковые стороны – отрезкам a и b .



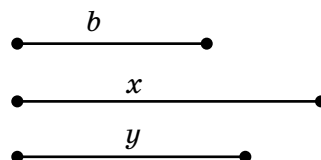
6) Постройте трапецию, основания которой равны отрезкам a и b , а диагонали – отрезкам x и y .



7) Постройте параллелограмм по стороне a и двум диагоналям d_1 и d_2 .



8) Постройте треугольник по стороне b и медианам x и y , проведённым к двум другим сторонам.



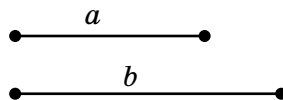
ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПОДОБИЯ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКОВ

Задание 73. Выполните задания.

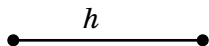
1) Разделите данный отрезок на 5 равных частей.



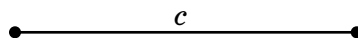
2) Даны отрезки a и b . Постройте отрезок длиной $\frac{b^2}{a}$.



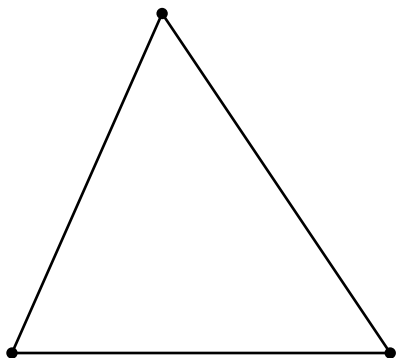
3) Постройте прямоугольный треугольник по высоте h , проведённой к гипотенузе, если известно отношение его катетов $2 : 3$.



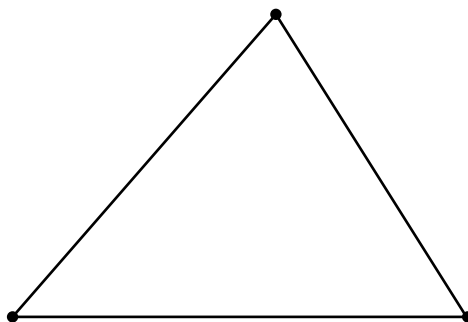
4) Постройте прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c , если известно отношение его катетов $2 : 1$.



5) В данный треугольник впишите квадрат (две вершины лежат на одной стороне треугольника, и по одной вершине – на двух других сторонах).



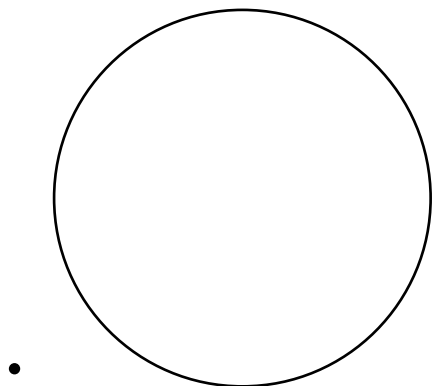
6) В данный треугольник впишите прямоугольник с отношением сторон 1 к 2 (большая сторона лежит на стороне треугольника, и по одной вершине прямоугольника – на двух других сторонах треугольника).



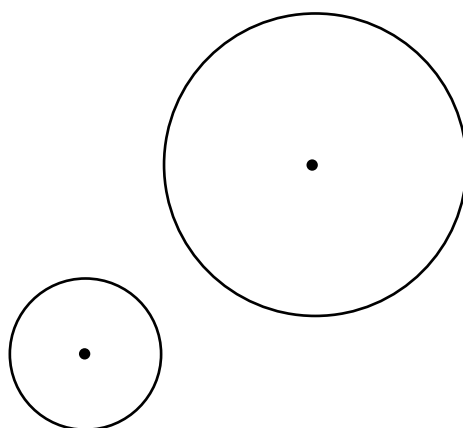
ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ С ОКРУЖНОСТЯМИ

Задание 74. Выполните задания.

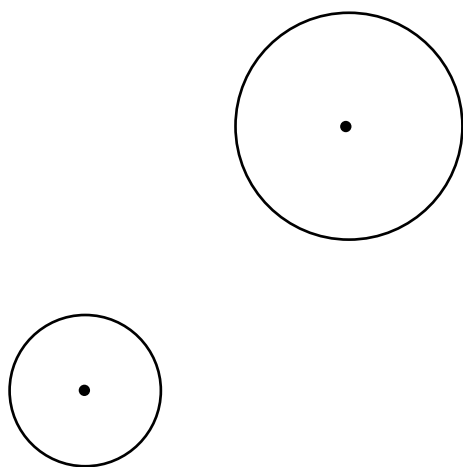
1) Постройте касательные из данной точки к данной окружности.



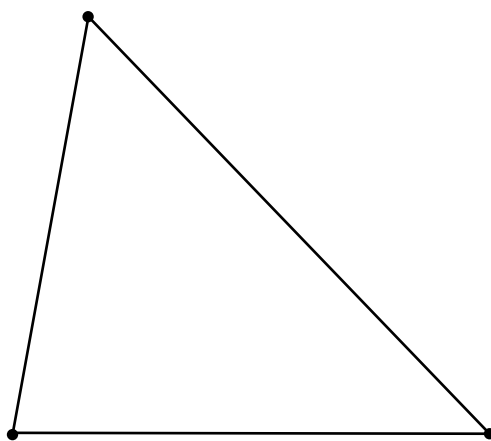
2) Постройте одну общую внешнюю касательную к данным окружностям.



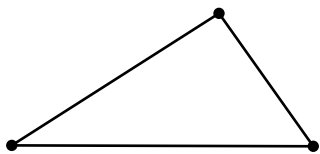
3) Постройте одну общую внутреннюю касательную к данным окружностям.



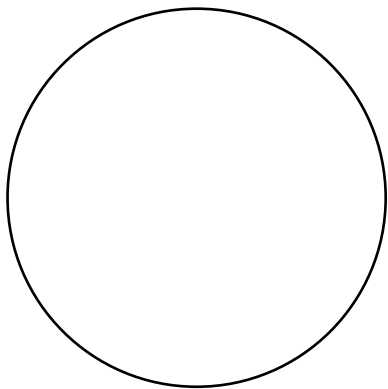
4) Постройте вписанную в данный треугольник окружность.



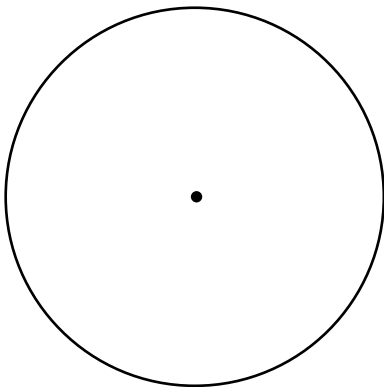
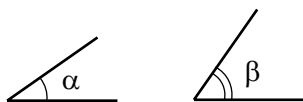
5) Постройте окружность, описанную около данного треугольника.



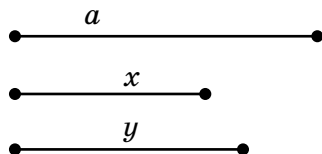
6) Постройте центр данной окружности.



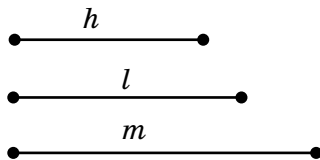
7) В данную окружность впишите треугольник, два угла которого равны данным углам.



8) Постройте треугольник по стороне a и двум высотам x и y , проведённым к двум другим сторонам.



9) Постройте треугольник по высоте h , медиане m и биссектрисе l , проведённым из одной вершины треугольника.



ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

ОКРУЖНОСТИ (ПОВТОРЕНИЕ И УГЛУБЛЕНИЕ 7 КЛАССА)

Задание 5Б. 1) 33° ; 2) 120° ; 3) 28° ; 4) 44° ; 5) 150° ; 6) 32° ; 7) 57° ; 8) 44° ; 9) 20° .

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Задание 7. 1) 5; 2) 30; 3) 32; 4) 19.

Задание 10. 1) 50° ; 2) 96° ; 3) 135° ; 4) 50° ; 5) 60° ; 6) 24° ; 7) 120° ; 8) 64° ; 9) 120° ; 10) 70° ; 11) 4; 12) 55° ; 13) 3; 14) 7; 15) 74° ; 16) 45° ; 17) 120° ; 18) 10; 19) 30° ; 20) 7; 21) 75° ; 22) 72° ; 23) 20° ; 24) 54° .

Задание 13А. 1) нет; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) нет; 6) да; 7) нет; 8) да; 9) да; 10) нет; 11) да; 12) нет; 13) нет; 14) да; 15) да; 16) да.

Задание 13В. 1) 30° ; 2) указание: проведите диагональ BD ; 3) 16, указание: удвойте медиану DE .

Задание 14. Указание: через вершину верхнего основания проведите прямую, параллельную боковой стороне.

Задание 18. Указания:

2) продлите биссектрису до пересечения с BC ; 3) продлите биссектрису до пересечения с BC ; 4) продлите CM до пересечения с AD ; 5) через точку C проведите прямую, параллельную BD до пересечения с AD ; 6) проведите через точку C прямую, параллельную AB ; 7) через точку C проведите прямую, параллельную AB ; 8) через точку B проведите прямую, параллельную AC .

Задание 19Б. 1) 125° ; 2) 16; 3) 72° . Указание: обозначьте величину угла ADC через x и составьте уравнение.

Задание 19В. 16; 18; 20.

Задание 20. 1) 24; 2) 5; 3) 1,25; 4) 4; 5) 30° ; 6) 44° ; 7) 66° ; 8) 55° ; 9) 40; 10) 60° ; 11) 40° ; 12) 35; 13) 14° ; 14) 10; 15) 5; 16) 66° ; 17) 70° ; 18) 60° ; 19) 50° ; 20) 21° .

Задание 22Б. 1) 58° ; 2) 101° ; 3) 80° .

Задание 22В. Указания:

1) проведите радиусы в точки касания; 2) проведите BD и рассмотрите четырёхугольник $DBPQ$; 3) рассмотрите четырёхугольники AC_1A_1C и PC_1A_1Q .

СРЕДНИЕ ЛИНИИ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Задание 23. Указания: 13) используйте теорему о медиане прямоугольного треугольника; 14) проведите OM ; 15) рассмотрите TM и NF как средние линии соответствующих треугольников.

Задание 24. Указания: 2) проведите среднюю линию треугольника DBC ; 3) проведите OM ; 4) воспользуйтесь тем, что $LN \parallel AC$, и примените теорему о медиане прямоугольного треугольника; 5) воспользуйтесь тем, что $ME \parallel AB$; 6) проведите среднюю линию, параллельную AB ; 7) отметьте середину PQ ; 8) ответ 72° , введите переменные – углы трапеции – и рассмотрите среднюю линию; 9) проведите среднюю линию треугольника ALC и введите переменные – углы.

Задание 28А. 1) 24; 2) 8; 3) 30; 4) 12, указание – $KLMN$ – прямоугольник.

Задание 28Б. 9; 3; 3; 3.

Задание 28В. 1) да; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да; 6) нет; 7) нет.

Задание 28Г. Указание: отметьте середину BM и рассмотрите средние линии AO и OC .

Задание 29. 1) 2:1; 2) 1:4; 3) 4:3; 4) 2:1; 5) 7:3; 6) 3:4; 7) 1:5; 8) 2:7; 9) 1:2; 10) 5:4; 11) 5:7; 12) 5:13; 13) 3:2; 14) 7:8.

Задание 30. 1) 2:1; 2) 1:3; 3) 1:1; 4) 3:2; 5) 6:1; 6) 1:6; 7) 3:4; 8) 3:1; 9) 1:4; 10) 3:1; 11) 2:3; 12) 2:1; 13) 2:1; 14) 3:1 15) 1:10

Задание 31А. 1) 1:2; 1:5; 2:3; 2:5; 2:1; 2) 1:5; 1:1; 1:2; 1:3; 1:3.

Задание 31Б. 1) 1:3; 2) 5:3; 3) 23:7.

ПЛОЩАДИ. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Задание 36. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{4}$; 8) $\frac{1}{6}$; 9) $\frac{2}{9}$. Указание: найдите отношение $CQ : QB$; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{2}$; 12) $\frac{3}{20}$; 13) $\frac{8}{21}$; 14) $\frac{4}{9}$; 15) $\frac{1}{4}$; 16) $\frac{65}{108}$; 17) $\frac{57}{112}$; 18) $\frac{64}{105}$; 19) $\frac{18}{55}$; 20) $\frac{1}{11}$.

Задание 37. 1) 5 : 8; 2) 2 : 3; 3) 5 : 4; 4) 4 : 3; 5) 2 : 7; 6) 1 : 1; 7) 2 : 1; 8) 1 : 1; 9) 1 : 2; 10) 1 : 2; 11) 4 : 1; 12) 4 : 1.

Задание 38. Указание: достройте данную фигуру до прямоугольника.
1) 22; 2) 9; 3) 14; 4) 30; 5) 9,5; 6) 26,5.

Задание 39. 1) 138; 2) 28; 3) 24; 4) 3; 5) 12; 6) 15.

Задание 43. Указание: через точку C проведите прямую, параллельную BD .

Задание 44. 1) 4; 2) 2; 3) 4.

Задание 45. 1) 72; 2) 360; 3) $2\sqrt{5}$; 4) указание: удвойте медиану $\triangle AMC$; 360.

Задание 46. 1) 84; 2) 48; 3) $12\sqrt{5}$; 4) $84\sqrt{3}$.

Задание 48Б. 1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 2 5) 2 6) 4.

Задание 48В. 1) $6\sqrt{3}$; 2) 6,5; 30; 3) 20; 150.

Задание 49. 1) 12; 65; 2) 8; 40; 3) 25; 510; 4) 4; 290 5) $2\sqrt{xy}$; $(x + y) \cdot \sqrt{xy}$. Указание: опустите перпендикуляр из точки O на PQ .

Задание 51. 1) 6; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $48\sqrt{2}$; 4) $3\sqrt{3} + 3$; 5) $2\sqrt{5}$; 6) 13; 7) 21; 8) 25; 9) 6; 10) $7\sqrt{5}$, $7\sqrt{2}$; 11) 256; 12) 3.

Задание 52Б. 1) 15, 8; 2) $\frac{120}{17}$; 3) 5; 4) 5; 5) 510; 6) 12.

ПОДОБИЕ. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

Задание 54. 1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{5}{6}$; 7) $\frac{9}{55}$; 8) $\frac{25}{64}$; 9) $\frac{3}{4}$.

Задание 55. 1) 4; 2) 2,4; 3) $2\sqrt{13} - 2$; 4) $6\sqrt{2}$; 5) $\frac{14}{3}$; 6) 9; 7) 3 : 8 8) $\frac{9}{13}$.

Задание 56. 1) 9 : 64; 2) 1 : 4; 3) 9 : 119; 4) 16 : 105; 5) 4 : 9; 6) 16 : 25; 7) 3 : 8; 8) 9 : 13; 9) 16 : 17; 10) 48 : 77; 11) 25 : 9; 12) 121 : 400.

Задание 57. 1) 6; 8; 2) $\frac{36}{25}$; 3) $\frac{9\sqrt{13}}{13}$; 4) 3; 5) 8. Указание: через середину медианы проведите прямую, параллельную основанию треугольника, и продлите искомый отрезок до пересечения с этой прямой; 6) 32.

Задание 58. Указание: в пунктах 3 и 5 используйте свойство биссектрисы треугольника для биссектрисы угла 30° и 45° соответственно.

Задание 61. 1) 1 : 4; 2) 2 : 3; 3) 4 : 9; 4) 7 : 5; 5) 12 : 7. Указание: найдите отношение крайних отрезков к диагонали по отдельности; 6) 4 : 15. Указание: найдите отношение крайних отрезков к диагонали по отдельности.

Задание 62.

1) $\triangle ABC$, MK , 10; 2) $\triangle NMG$, PK , $\frac{16}{3}$; 3) $\triangle KNP$, MQ , 4; 4) $\triangle KMQ$, NP , $\frac{9}{2}$; 5) $\triangle QPG$, MN , 15.

Задание 63. 1) 7 : 4, 21 : 5; 2) 8 : 1, 2 : 1; 3) 18 : 49, 67 : 10; 4) 7 : 20, 1 : 9; 5) 1 : 3, 3 : 4; 6) 4 : 1, 1 : 1; 7) 2 : 7, 6 : 1; 8) 3 : 2, 3 : 4; 9) 2 : 15, 3 : 16; 10) 1 : 1, 1 : 7; 11) 1 : 1, 11 : 7; 12) 4 : 5, 3 : 5.

Задание 64Б. 1) 3 : 2, 2 : 3; 2) 7 : 18; 3) 11 : 10, 2 : 1; 4) 25 : 13.

Задание 68. Верные утверждения 1, 2, 7, 8.

Задание 69. 1) 42; 2) 12; 3) 20; 4) 18; 5) 9,6; 6) 9; 7) $\frac{81}{8}$.

Задание 70. 1) $\frac{54 - 4\sqrt{26}}{25}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{68 - 16\sqrt{13}}{9}$.

Задание 71А. 12; 4.

Задание 71Б. 1) 2; 2) 3; 4) 3; 3) $\frac{135 - 15\sqrt{17}}{32}$.

Задание 71В. Указание: используйте произведение отрезков секущих и хорд.

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Задание 72. Указания: 1) диагональ квадрата делит пополам его угол; 2) противоположные стороны параллелограмма равны; 3) средняя линия треугольника параллельная его стороне; 4) противоположные стороны параллелограмма параллельны; рассмотрите 3 случая – какие вершины противоположны; 5) используйте метод переноса стороны трапеции; 6) используйте метод переноса диагонали трапеции.

Задание 73. Указания: 1) используйте теорему о пересечении сторон угла рядом параллельных прямых; 2) используйте теорему о пересечении сторон угла рядом параллельных прямых; 3) постройте прямоугольный треугольник с нужным отношением катетов, проведите в нём высоту к гипотенузе; 4) постройте прямоугольный треугольник с нужным отношением катетов; 5) постройте квадрат, три вершины которого лежат на двух сторонах треугольника; 6) постройте прямоугольник с нужным отношением сторон, три вершины которого лежат на двух сторонах треугольника.

Задание 74. Указания: 7) используйте равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу; 8) используйте тот факт, что две вершины треугольника и два основания высот, проведённых к двум другим сторонам, лежат на одной окружности; 9) постройте центр описанной окружности будущего треугольника.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ОКРУЖНОСТИ (ПОВТОРЕНИЕ И УГЛУБЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА 7 КЛАССА)	4
Касательная к окружности	4
Углы, связанные с окружностью	7
МНОГОУГОЛЬНИКИ	13
Общие свойства многоугольников	13
Параллелограмм. Ромб. Прямоугольник. Дельтоид	15
Трапеция	24
Четырёхугольники и окружности	31
СРЕДНИЕ ЛИНИИ. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА.....	38
Средние линии треугольника и трапеции	38
Теорема Фалеса.....	45
ПЛОЩАДИ. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА.....	50
Основные формулы вычисления площадей	50
Теорема Пифагора.....	57
Площадь, теорема Пифагора и окружности	62
ПОДОБИЕ. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ.....	66
Подобные треугольники.....	66
Пропорциональные отрезки	73
Подобие и окружности.....	79
ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ	88
Задачи на построение многоугольников	88
Задачи на построение с применением подобия и пропорциональных отрезков	90
Задачи на построение с окружностями	91
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ	93

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Учебное электронное издание

Ниренбург Т. Л.

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс

Тетрадь-тренажёр

Углублённый уровень

Генеральный директор

М. Б. Миндюк

Редактор *Д. П. Локтионов*

Художественный редактор *Е. Ю. Воробьёва*

Компьютерная верстка и макет *Е. В. Лупенко*

Корректор *М. Н. Локтионова*

Подписано к использованию 27.07.25

Формат 19,0×28,5 см

Гарнитура SchoolBook

Издательство «Интеллект-Центр»

125445, Москва, ул. Смольная, 24А, этаж 6, ком. 24

Тел.: (495) 660-34-53

Сайт: <https://www.intellectcentre.ru/>

Эл. почта: intellect@izentr.ru

**Электронное издание данной книги подготовлено
Агентством электронных изданий «Интермедиатор»**

Сайт: <https://www.intermediator.ru>

Телефон: (495) 587-74-81

Эл. почта: info@intermediator.ru

Издательство «Интеллект-Центр»

- Учебные материалы для подготовки к ЕГЭ, ОГЭ и Всероссийским Проверочным Работам
- Практикумы и дидактические материалы
- Сборники тестовых заданий
- Материалы для развития интеллектуальных способностей
- Учебные пособия, реализующие современные технологии в обучении и контроле знаний учащихся

- **Покупайте наши пособия в электронном формате в интернет-магазине «Электронный универс»**
e-Univers.ru



Издательство «Интеллект-Центр»

тел./факс: + 7 (495) 660-34-53

Ждём Ваших писем: 125445, г. Москва, ул. Смольная, д. 24А,

этаж 6, ком. 24 | e-mail: intellect@izentr.ru

www.intellectcentre.ru | vk.com/intellektcentre | t.me/izentr